

Série A
N° DE SÉRIE :
461
N° D'ORDRE :
492

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR

Georges R. BOULANGER

Ingénieur civil des Mines (A.I.Br.)

Chargé de cours à la Faculté Polytechnique de Mons
et à l'Université de Bruxelles

1^{re} THESE. — CONTRIBUTION A LA THEORIE GENERALE DES
ABAQUES A PLANS SUPERPOSES.

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 22 mars 1949 devant la Commission d'Examen.

MM. M. FRÉCHET	} <i>Président.</i> <i>Examineurs.</i>
G. BOULIGAND	
M. JANET	

BRUXELLES

ROBERT LOUIS
Rue Borrens, 37-39

PARIS

GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55

1949

Nom du candidat : **BOULANGER.**
Prénoms : **Georges, Robert.**

Date de la soutenance : 22 mars 1949

Numéro d'ordre : Série A 461, N° 492

BOULANGER (Georges, R.). —
Contribution à la théorie générale
des abaques à plans superposés.
— Bruxelles, Robert Louis et
Paris, Gauthier-Villars, 1949,
in-4°, 120 p., 30 fig. et 4 tableaux.

Thèse Doct. Univ. Paris (Sc. math.),
1949, Sér. A 461, N° 492.

BOULANGER (Georges, R.). —
Contribution à la théorie générale
des abaques à plans superposés.
— Bruxelles, Robert Louis et
Paris, Gauthier-Villars, 1949,
in-4°, 120 p., 30 fig. et 4 tableaux.

Thèse Doct. Univ. Paris (Sc. math.),
1949, Sér. A 461, N° 492.

BOULANGER (Georges, R.). —
Contribution à la théorie générale
des abaques à plans superposés.
— Bruxelles, Robert Louis et
Paris, Gauthier-Villars, 1949,
in-4°, 120 p., 30 fig. et 4 tableaux.

Thèse Doct. Univ. Paris (Sc. math.),
1949, Sér. A 461, N° 492.

BOULANGER (Georges, R.). —
Contribution à la théorie générale
des abaques à plans superposés.
— Bruxelles, Robert Louis et
Paris, Gauthier-Villars, 1949,
in-4°, 120 p., 30 fig. et 4 tableaux.

Thèse Doct. Univ. Paris (Sc. math.),
1949, Sér. A 461, N° 492.

Série A
N° DE SÉRIE :
461
N° D'ORDRE :
492

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR

Georges R. BOULANGER

Ingénieur civil des Mines (A.I.Br.)

Chargé de cours à la Faculté Polytechnique de Mons
et à l'Université de Bruxelles

1^{re} THESE. — CONTRIBUTION A LA THEORIE GENERALE DES
ABAQUES A PLANS SUPERPOSES.

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 22 mars 1949 devant la Commission d'Examen.

MM. M. FRÉCHET	<i>Président.</i>
G. BOULIGAND	} <i>Examineurs.</i>
M. JANET	

BRUXELLES
ROBERT LOUIS
Rue Borrens, 37-39

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55

1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

BLARINGHEM	T	Botanique.	CHAUDRON	T	Chimie.
JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	WYART		Minéralogie.
DENJOY	T	Théorie des fonctions.	TEISSIER	T	Zoologie.
LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	MANGENOT	T	Biologie végétale.
E. DARMOIS	T	Physique générale.	AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
R. LEVY	T	Physiologie comparée.	MONNIER		Physiologie générale.
VILLAT	T	Mécanique des fluides.	PIVETEAU		Géologie.
JACOB	T	Géologie.	ROCARD	T	Physique.
PASCAL	T	Chimie générale.	H. CARTAN		Calcul différentiel.
FRECHET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	LAFFITTE		Chimie (P. C. B.).
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	FAVARD		Calcul des probabilités et Physique mathématique.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	COULOMB	T	Physique du globe.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	M ^{me} COUSIN		Biologie animale (P. C. B.).
JOB	T	Chimie générale.	CHRETIEN		Analyse et mesures chimiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	DRACH		Evolution des êtres organisés.
COMBES	T	Physiologie végétale.	KASTLER		Physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	CHATELET	T	Arithmétique et Théorie des nombres.
PERES	T	Mécanique rationnelle.	EPHRUSSI	T	Génétique.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	BAUER	T	Chimie physique.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	RIVIERE		Géologie (P. C. B.).
CURIE	T	Physique (P. C. B.).	GAUTHERET		Biologie végétale (P. C. B.).
RIBAUD	T	Hautes températures.	LUCAS		Physique.
CHAZY	T	Mécanique analytique.	MORAND		Physique.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.	ARNULF		Optique appliquée.
DUPONT	T	Théories chimiques.	THOMAS		Zoologie.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	SOLEILLET		Physique.
BARRABE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	FORTIER		Mécanique expérimentale des fluides.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	DANJON	T	Astronomie.
G. DARMOIS	T	Mathématiques générales.	FROMAGEOT		Chimie biologique.
BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.	LAPORTE		Physique générale et Radioactivité.
AUBEL	T	Chimie biologique.	JANET		Mathématiques générales.
M ^{me} JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et Radioactivité.	PETIT	T	Biologie maritime.
PLANTEFOL	T	Botanique.	QUENEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
CABANNES	T	Recherches physiques.	GALLIEN		Biologie animale (P. C. B.).
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés.	EICHORN		Biologie végétale (P. C. B.).
PREVOST		Chimie organique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P. C. B.).
BOULIGAND	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.	LAVAL		Physique (P. C. B.).
			M ^{me} CAUCHOIS		Chimie physique.
			THELLIER		Physique du globe.
			AUDUBERT		Electrochimie.
			L'HERITIER		Génétique.
			PONCIN		Mécanique des fluides.

Secrétaire CH. MONIER.



A ma MERE

A mon Maître

Edouard BOGAERT

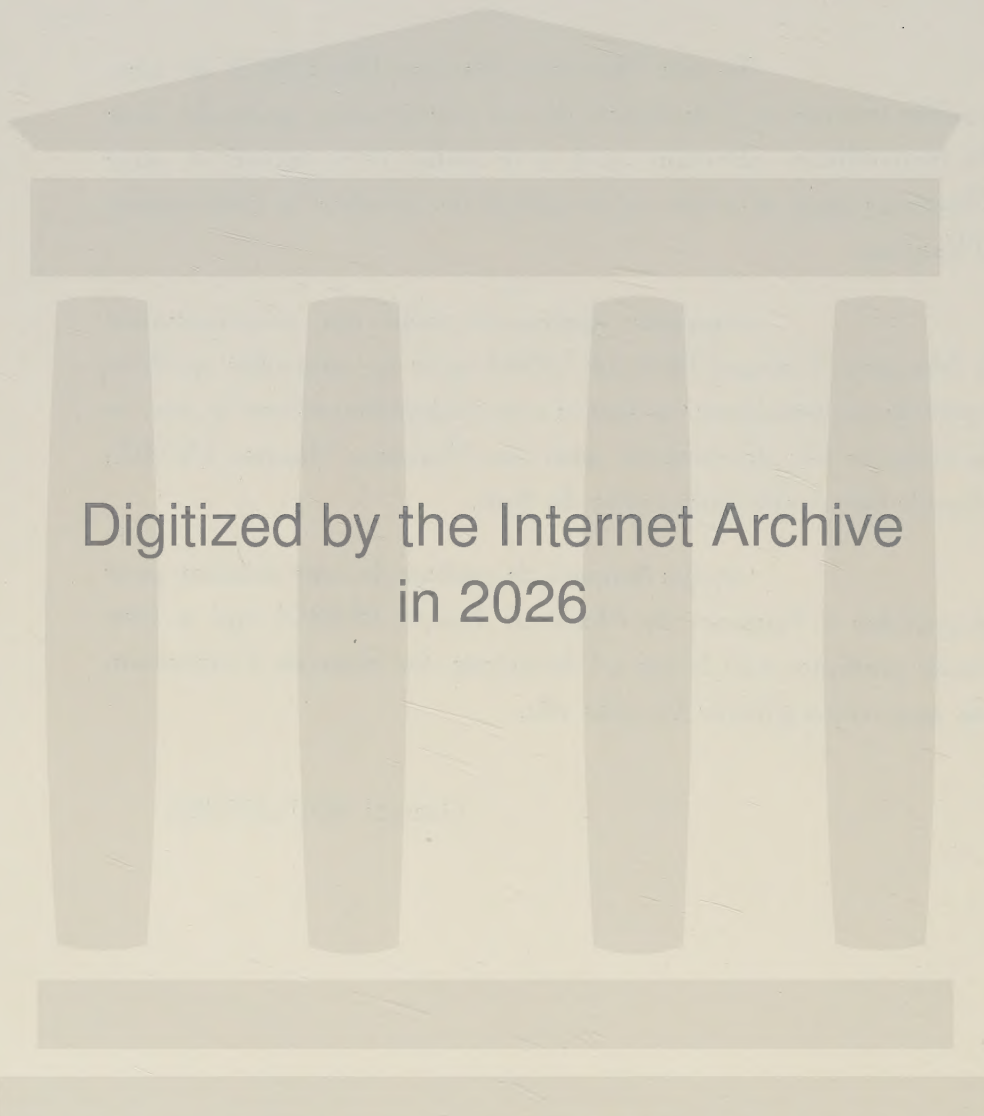
dont je vénère la mémoire.

Je prie Monsieur Maurice FRECHET de bien vouloir trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude pour la bienveillante attention qu'il a accordée à ce travail et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider la Commission d'Examen.

J'apporte également toute ma reconnaissance à Monsieur Georges BOULIGAND pour la sympathie qu'il ne cesse de me témoigner, et dont je sens profondément tout le prix. Je le remercie très sincèrement, ainsi que Monsieur Maurice JANET, d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je suis heureux de profiter de cette occasion pour renouveler à l'adresse de Monsieur Joseph PERES, qui a bien voulu présenter mes Notes à l'Académie des Sciences, l'expression de mes remerciements les plus vifs.

Georges BOULANGER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547113_0003

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à la

THEORIE GENERALE DES ABAQUES

A PLANS SUPERPOSES

INTRODUCTION

Les abaques à plans mobiles superposés constituent la forme la plus générale des nomogrammes plans actuellement connus. Tous les types d'abaques utilisés jusqu'à présent peuvent y être rattachés a posteriori, et c'est un fait remarquable que des procédés nomographiques apparemment très différents les uns des autres puissent être considérés comme autant de cas particuliers d'une méthode générale unique.

La théorie des abaques à plans multiples n'a pas été développée — à notre connaissance — au delà des premières considérations qui permettent de reconnaître, en gros, les conditions dans lesquelles on peut envisager la représentation des relations analytiques au moyen de nomogrammes à plans superposés.

Dès la fin du siècle dernier cependant Maurice d'Ocagne — à qui revient le mérite d'avoir créé la Nomographie en tant que Science autonome — indique la possibilité théorique de cette représentation, d'abord pour deux plans, ensuite pour un nombre quelconque de plans. Mais à part quelques applications sporadiques et très particulières — les abaques logarithmiques de Mehmke, par exemple — on ne rencontre*

* Maurice d'Ocagne, Sur une méthode nomographique générale, C. R. de l'Ac. des Sc., T. 117, 1893, pp. 216 et 277.

Maurice d'Ocagne, Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés, C. R. de l'Ac. des Sc., T. 126, 1893, p. 397.

pas de développements à ce sujet dans la littérature scientifique ou technique des années qui suivent.

*Le principe de l'emploi des abaques à plans mobiles est pourtant explicitement donné par d'Ocagne dans de nombreuses publications. Il écrit par exemple * :*

« La considération de la droite mobile servant à prendre les alignements ** et qui peut être supposée tirée sur un plan transparent conduit tout naturellement à l'idée de tracer sur ce transparent, ou même sur plusieurs transparents superposés, des lignes moins simples, voire des systèmes d'éléments cotés pouvant donner lieu à des relations de position plus compliquées entre éléments cotés de plus en plus nombreux; cette indication sommaire suffit à faire entrevoir l'étendue des horizons qui s'ouvrent encore dans le domaine de la Nomographie. »

*Mais si d'Ocagne s'attache encore, en diverses occasions, à préciser les conditions dans lesquelles peut s'effectuer cette généralisation, il faut attendre les travaux de Wladimir Margoulis pour voir apporter à la théorie des abaques à plans mobiles une contribution importante et suffisamment décisive que pour permettre de passer aux réalisations pratiques ***. Et si au nom de d'Ocagne resteront associées les premières applications de la méthode des points alignés, c'est à celui de Margoulis que s'est attaché l'emploi des premiers abaques à plans superposés.*

Wladimir Margoulis a cependant limité son étude aux nomogrammes à transparent unique. Ce sont des nomogrammes à deux plans. Et cet auteur ne fait pas allusion aux possibilités qui résulteraient d'une augmentation du nombre de plans.

*Nous ne pouvons citer, pour ce qui concerne les abaques à plus de deux plans, qu'une étude de M. René Lambert, publiée en 1937 ****.*

* Maurice d'Ocagne, *Calcul graphique et Nomographie*, Paris, Doin, 3^e édit., 1924, p. XXV.

** Il s'agit des nomogrammes à points alignés.

*** Wladimir Margoulis, *Les abaques à transparent orienté ou tournant*, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

**** René Lambert, *Structure générale des nomogrammes et des systèmes nomographiques*, Paris, Hermann, 1937.

Pour la première fois la structure des abaques pouvant comporter un nombre quelconque de plans y est envisagée d'une façon précise. Mais si M. Lambert pousse son investigation plus avant que ne l'avait fait d'Ocagne, il reste encore sur un plan très général.

Nous croyons qu'il faut maintenant, pour préparer la voie à de nouvelles applications et permettre à la Nomographie de satisfaire aux exigences auxquelles elle pourrait être amenée à faire face dans un proche avenir, développer d'une façon concrète la théorie des abaques à plans multiples. Car toute l'histoire du développement du calcul nomographique est caractérisée par une augmentation continue de la complexité des problèmes pour lesquels on demande à la Nomographie de fournir des solutions et par l'obligation, pour cette Science, de s'adapter constamment aux exigences de la pratique.

Relations toujours plus compliquées à traduire en abaques, augmentation du nombre des variables, nécessité pour les nomogrammes de rester d'un emploi commode, tels sont les éléments qui conditionnent l'évolution du calcul nomographique. Un élargissement au maximum des possibilités nomographiques doit en être la contre-partie.

C'est pourquoi nous avons formé le projet de jeter les bases d'une NOMOGRAPHIE GENERALE qui, se dégageant délibérément des voies suivies jusqu'à présent, s'attaquera directement au problème le plus général de la représentation nomographique plane au moyen d'abaques à plans mobiles.

Une telle entreprise implique dès l'abord la possession d'un outil d'investigation permettant de développer avec succès l'étude des propriétés morphologiques des abaques considérés.

Cet outil, nous pensons l'avoir trouvé dans la REPRESENTATION SCHEMATIQUE dont nous proposons l'emploi. Par cette représentation les relations de position des systèmes géométriques portés par les différents plans des abaques sont visualisés dans des schémas que nous désignons sous le nom de FORMES.

L'étude de la structure des formes sera le premier objectif de la Nomographie générale.

Après avoir rappelé le principe des abaques à plans superposés et

complété sur divers points la terminologie classique, nous donnerons, dans le présent travail, le principe de notre procédé de représentation schématique des structures.

Nous aborderons ensuite l'étude des formes dont tous les éléments sont des systèmes de lignes cotées, et pour lesquelles nous avons proposé la dénomination de formes complètes.

Cette manière de procéder nous paraît justifiée par le fait que c'est sur la théorie des formes complètes que devront logiquement prendre appui les développements ultérieurs de l'étude morphologique dont nous jetons ici les fondements.

Nous nous limiterons, dans ce mémoire, aux formes dont les contacts sont de nature tangentielle, nous réservant de développer ailleurs l'étude des formes à contacts ponctuels et des formes qui comportent à la fois des contacts ponctuels et tangentiels.

PREMIERE PARTIE

Considérations générales Principe de la représentation schématique

Rappel du principe général des abaques à plans superposés

Les abaques à plans mobiles superposés ou abaques à plans multiples sont constitués par des ensembles de plans qui portent les éléments géométriques dont l'emploi est à la base de toute représentation nomographique. Ces plans sont superposés. Ils sont susceptibles de glisser les uns par rapport aux autres et d'occuper, lors de l'emploi des abaques auxquels ils appartiennent, diverses positions relatives.

Les plans sont matérialisés, en pratique, par des feuilles de papier transparent et les éléments géométriques sont tracés sur ces feuilles. Lors de la superposition, la transparence permet d'observer simultanément tous les éléments.

Positionnement des plans et résolution.

L'emploi d'un abaque à plans superposés repose essentiellement sur l'*établissement* et la *constatation* de coïncidences géométriques — appelées contacts — entre les éléments des différents plans.

Ainsi sont immédiatement mises en évidence les deux opérations fondamentales dont est constituée toute détermination nomographique effectuée au moyen d'abaques du type considéré : le POSITIONNEMENT DES PLANS et la RESOLUTION.

Les plans sont tout d'abord disposés les uns par rapport aux autres, en vue des lectures à effectuer, au moyen de contacts prévus à cet effet. Cette opération constitue le positionnement des plans et les contacts

utilisés sont dits CONTACTS DE FIXATION. Ces contacts sont tels que, quand le positionnement est terminé, chaque plan ne possède plus, par rapport à l'ensemble des plans restants, aucun degré de liberté.

Quand tous les plans sont fixés les lectures s'effectuent, au cours d'une opération qui constitue la résolution, au moyen de contacts dits CONTACTS DE RESOLUTION. Cette opération s'exécute comme dans les abaques à plan unique, avec cette différence que les éléments qui participent à un contact de résolution n'appartiennent plus ici à un seul et même plan.

Un même contact pourra, en principe, jouer tantôt le rôle de contact de fixation, tantôt celui de contact de résolution, suivant les variables qui seront prises pour inconnues.

Les éléments peuvent, eux aussi, être classés en deux groupes suivant la fonction qu'ils sont appelés à remplir dans l'abaque, c'est-à-dire en fait suivant la nature des contacts auxquels ils appartiennent. C'est ainsi que nous appellerons ELEMENTS DE FIXATION et ELEMENTS DE RESOLUTION les éléments appartenant respectivement à des contacts de fixation ou de résolution.

Ici encore un même élément pourra jouer l'un ou l'autre rôle, suivant la fonction du contact dont il fait partie.

Les abaques à plans mobiles constituent, en fait, des abaques déformables. Chaque lecture dépend — comme dans les abaques à plan unique — des systèmes géométriques impliqués dans l'opération de résolution, mais aussi de la *situation relative* de ces systèmes dans les conditions particulières à la lecture considérée.

C'est seulement par l'emploi d'abaques à plans multiples que l'on peut obtenir des représentations nomographiques intrinsèques de relations dont le nombre de variables est élevé.

Eléments constitutifs

Les éléments géométriques dont on peut concevoir l'emploi dans les abaques à plans mobiles sont les POINTS — éléments sans dimension — et les LIGNES — éléments à une dimension. L'utilisation d'élé-

ments à plus d'une dimension est exclue puisque ces éléments doivent pouvoir être tracés dans des plans.

Nous considérons la LIGNE comme étant l'élément fondamental de toute représentation nomographique.

A chaque variable sera associée, en principe, une *famille de lignes cotées* ou FAISCEAU et il y aura, dans le cas le plus général, autant de faisceaux dans un abaque que de variables dans la relation qu'il représente.

Nous ne considérons pas le point comme élément fondamental de la représentation nomographique mais seulement comme un cas de dégénérescence de la ligne.

Il doit dès lors être entendu que *tout nomogramme dans la composition duquel entrent des points sera regardé comme un cas particulier d'un abaque plus général dont tous les éléments géométriques seraient constitués par des lignes.*

Les familles de points cotés qui résultent de la dégénérescence des faisceaux de lignes cotées constituent des ECHELLES.

Outre les éléments cotés qui forment les faisceaux et les échelles il peut entrer, dans la constitution des abaques, des éléments *non cotés* — lignes ou points — généralement désignés sous le nom d'*éléments constants*.

Nous considérerons ces éléments comme résultant de la dégénérescence de faisceaux en ce qui concerne les lignes, d'échelles en ce qui concerne les points.

Le point non coté pourra aussi être considéré comme une dégénérescence d'une ligne non cotée.

Il sera encore entendu que *tout abaque dans la constitution duquel entrent des éléments non cotés doit être considéré comme un cas particulier d'un abaque plus général dans lequel ces éléments seraient remplacés par des systèmes cotés.*

La figure 1 montre la représentation nomographique d'une variable au moyen d'un faisceau de lignes cotées F , ainsi que les dégénérescences que peut subir ce système.

Comme l'indique le schéma le point (E', F'') peut être considéré



Fig. 1

comme dérivant de l'échelle E ou de la ligne F' , ces deux éléments dérivant eux-même de F .

REMARQUE. — Il résulte des considérations qui précèdent que nous n'utiliserons pas la notion de *réseau* ou d'*ensemble de points à deux cotes*.

C'est ainsi que nous considérerons un système tel que celui qui est représenté par la figure 2 comme formé de *deux faisceaux de lignes cotées*, quel que soit le rôle que ce système puisse être appelé à jouer dans l'abaque auquel il appartient. Dans la conception de d'Ocagne, au contraire, il serait considéré comme un ensemble de *points à deux cotes* s'il intervenait, par exemple, dans la constitution d'un abaque à points alignés.

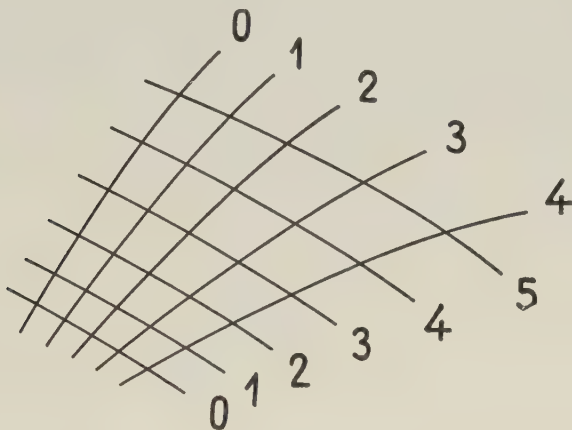


Fig. 2

L'abandon de la notion de réseau permet de présenter la théorie des abaques sous un angle à la fois plus rationnel et plus général. Il nous paraît justifié par les faits suivants :

1° — Les points à deux cotes n'ont qu'une existence fictive. Ce sont des *lignes* qui, en fait, sont dessinées et utilisées dans un réseau. Les points d'intersection de ces lignes ne jouent un rôle effectif que lors de l'emploi de l'abaque, par leur intervention dans la réalisation de contacts ponctuels.

Faire abstraction des lignes qui constituent un réseau pour considérer les points déterminés par leurs intersections nous paraît aussi absurde que de considérer, par exemple, un abaque à entrecroisement comme étant constitué d'un faisceau de lignes et d'un réseau de points à deux cotes.

2° — Si l'on veut, à l'instar de ce qui a été fait pour les points à une cote qui constituent les échelles, faire dériver les points à deux cotes d'éléments « lignes » plus généraux, on voit que le réseau doit être considéré comme un cas de dégénérescence d'un ensemble *doublement infini* de lignes.

Un tel ensemble n'étant pas susceptible d'être utilisé dans la pratique on serait ainsi conduit à faire dériver les abaques comportant des réseaux, d'abaques plus généraux *dont l'existence resterait purement théorique*.

Cet inconvénient ne se produit pas si l'on adopte le point de vue indiqué plus haut.

Contacts

Comme nous l'avons dit plus haut, l'emploi des abaques à plans multiples est basé sur la réalisation et la constatation de coïncidences géométriques ou contacts.

Les contacts dont l'emploi a été reconnu possible en pratique appartiennent aux deux catégories suivantes :

1° — Les CONTACTS TANGENTIELS, dont le type général est caractérisé par le fait que deux lignes L_1 et L_2 sont tangentes entre elles (fig. 3);

2° — Les CONTACTS PONCTUELS, dont le type général est caractérisé par le fait que trois lignes L_1 , L_2 et L_3 sont concourantes (fig. 4).

Dans un contact tangentiel les deux éléments du contact peuvent appartenir à un même plan ou se trouver dans deux plans différents ;

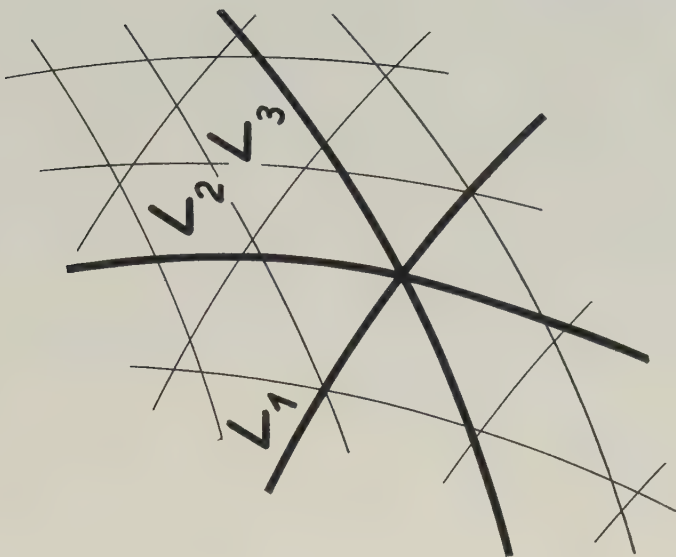


Fig. 4

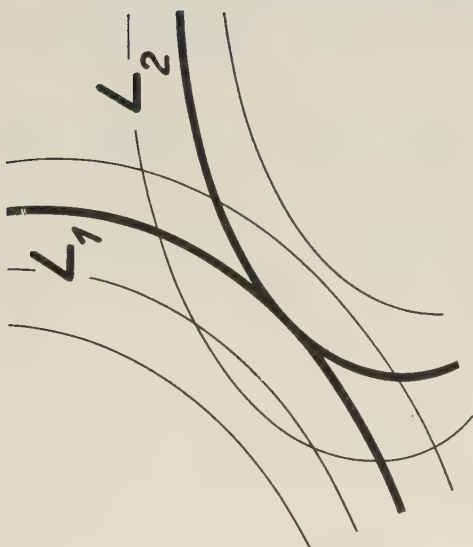


Fig. 3

dans un contact ponctuel les trois éléments peuvent appartenir à un, deux ou trois plans.

Tous les contacts qui n'appartiennent pas à l'un des deux types indiqués rentrent dans les catégories correspondantes à titre de cas particuliers ou de combinaisons plus ou moins particulières de ces types généraux.

EXEMPLE I. — Le contact de deux points est un cas de dégénérescence du contact tangentiel de deux lignes.

EXEMPLE II. — Le contact de deux points définis chacun par l'intersection de deux lignes (contact appelé communément *contact double*) est une combinaison de deux contacts ponctuels ayant deux lignes en commun.

Du point de vue fonctionnel nous distinguerons, comme il a déjà été indiqué plus haut :

1° — Les CONTACTS DE FIXATION ou de POSITION qui servent à fixer, en vue des lectures à effectuer ensuite, les positions relatives des différents plans constituant l'abaque ;

2° — Les CONTACTS DE RESOLUTION qui, une fois les plans fixés, interviennent dans les lectures proprement dites.

Caractères généraux - Terminologie

Il résulte de ce qui précède que tout abaque à plans mobiles superposés se caractérise essentiellement, quand le nombre de plans est donné, par la nature de ses éléments (*point de vue géométrique*) et par ses conditions d'emploi (*point de vue cinématique*).

Nous dégagerons les caractères les plus généraux des représentations nomographiques à plans multiples, par l'examen des possibilités relatives à ces deux facteurs.

Point de vue nature des éléments.

Au point de vue de la nature des éléments nous distinguerons les

abaques dont tous les éléments sont des lignes cotées et les abaques qui renferment des éléments dégénérés ou des éléments constants.

Nous appellerons :

— ABAQUES COMPLETS les abaques dont tous les éléments sont des lignes cotées, à l'exclusion de tout élément dégénéré ou constant ;

— ABAQUES DEGENERES les abaques dans lesquels certaines lignes, cotées ou non, ont dégénéré en points ;

— ABAQUES DERIVES les abaques dans la constitution desquels entrent un ou plusieurs éléments constants.

Il sera entendu également que, pour pouvoir être qualifié de complet dans l'acception que nous donnons à ce terme, un abaque ne pourra présenter aucune singularité qui soit susceptible d'entraîner une réduction du nombre d'éléments. *Il ne pourra, en particulier, comporter que des contacts simples.*

Un abaque dégénéré, par contre, peut comporter moins d'éléments que l'abaque dont il provient.

Enfin tout abaque qui comporte des éléments constants sera dit dérivé de l'abaque plus général dans lequel ces éléments seraient remplacés par des familles d'éléments cotés.

Un abaque peut évidemment être à la fois dérivé et dégénéré. C'est le cas, par exemple, pour les abaques comportant des points constants (cas de dégénérescence et de dérivation portant sur un même élément), pour les abaques comportant des échelles et des lignes constantes (cas de dégénérescence et de dérivation portant sur des éléments différents), et ainsi de suite.

Point de vue conditions d'emploi.

Au point de vue des conditions d'emploi nous devons considérer la nature des contacts, les conditions de mise en place des plans et le nombre d'opérations de résolution qu'implique une lecture effective.

Pour le premier facteur nous adopterons la terminologie qui est

classique dans l'étude des abaques à un et à deux plans. Elle s'applique sans modification aux abaques dont le nombre de plans est quelconque.

Nous désignerons ainsi successivement par :

— ABAQUES A CONTACTS TANGENTIELS, ou d'une manière plus concise *abaques tangentiels*, les abaques dont tous les contacts sont de nature tangentielle ;

— ABAQUES A CONTACTS PONCTUELS, ou encore *abaques ponctuels*, les abaques dont tous les contacts sont de nature ponctuelle ;

— ABAQUES MIXTES, les abaques qui comportent à la fois des contacts ponctuels et des contacts tangentiels.

Pour le second facteur — conditions de mise en place des plans — nous devons envisager deux cas :

1^{er} cas. — Chaque plan peut être positionné par rapport à l'ensemble des plans mis en place avant lui.

2^d cas. — Certains plans doivent être groupés préalablement à leur mise en place, les ensembles de plans ainsi formés pouvant être fixés par rapport aux plans qui précèdent.

Nous appellerons :

— ABAQUES A PLANS INDEPENDANTS les abaques dont tous les plans peuvent être fixés individuellement les uns après les autres (*1^{er} cas* ci-dessus) ;

— ABAQUES A PLANS GROUPES les abaques dont l'emploi exige que l'on constitue certains groupes de plans ayant leur structure propre et devant être considérés ensuite comme des unités indépendantes (*2^d cas* ci-dessus).

On conçoit que l'indépendance ou la non-indépendance des plans puisse être affectée, en principe, par l'ordre choisi pour la mise en place des plans. Nous nous bornerons ici à énoncer cette remarque, nous réservant de revenir plus loin sur ce point.

Attirons l'attention sur le fait que nous ne considérons pas dans ce

travail le cas des abaques pour lesquels le positionnement des plans exige certains tâtonnements.

Pour le troisième facteur enfin — nombre des opérations de résolution — nous pouvons conserver la terminologie classique et appeler :

— ABAQUES SIMPLES les abaques pour lesquels l'opération de résolution est unique ;

— ABAQUES COMPOSES les abaques dont l'emploi implique plusieurs opérations successives et qui sont en fait constitués d'une chaîne d'abaques simples présentant chacun leurs caractères particuliers.

En connexion étroite avec le mode d'emploi nous grouperons encore les abaques en deux classes, compte tenu de leurs possibilités quant aux variables qu'ils permettent de déterminer.

Nous appellerons :

— ABAQUES A RESOLUTION TOTALE les abaques dans lesquels toutes les variables peuvent être prises comme inconnues ;

— ABAQUES A RESOLUTION PARTIELLE les abaques dans lesquels certaines variables seulement peuvent être prises pour inconnues.

Alors que pour les abaques à plan unique la résolution partielle n'apparaît que dans le cas où il existe des systèmes surabondants, les abaques à plans multiples peuvent être du type à résolution partielle sans comporter de tels systèmes.

Nous appellerons enfin :

— ABAQUES GENERAUX les abaques exempts de toute particularité de ligne ou de contact susceptible de les distinguer des types fondamentaux de leur groupe ;

— ABAQUES SPECIAUX les abaques qui ne présentent pas le caractère qui vient d'être indiqué.

Les abaques considérés dans la suite de ce travail sont des abaques généraux.

Relation entre le nombre n des plans d'un abaque et le nombre N des variables de la relation représentée

Soit un abaque à n plans et une relation à N variables représentée par cet abaque. Nous nous proposons d'établir la relation qui lie N à n dans l'hypothèse où l'abaque est COMPLET et non composé.

Le nombre des variables que peut comporter une relation représentée par un abaque d'un type donné est évidemment égal au nombre des systèmes cotés non surabondants qui entrent dans la constitution de cet abaque. Nous allons déterminer ce nombre en nous plaçant dans l'hypothèse donnée.

Un plan possède, par rapport à un autre plan sur lequel il peut glisser, *trois* degrés de liberté. Or, tout contact simple — ponctuel ou tangentiel — que l'on établit entre ces plans abaisse de *une* unité le nombre de ces degrés de liberté. Il faudra donc, pour fixer un plan par rapport à un autre plan ou par rapport à un groupe de plans formant bloc, *trois* contacts du type envisagé.

La réalisation de ces contacts implique l'intervention de *deux* ou de *trois* éléments par contact, suivant qu'il s'agit d'un contact tangentiel ou ponctuel. Il en résulte qu'il faut prévoir un nombre total minimum de 6 éléments de fixation et un nombre maximum de 9 éléments *par plan à positionner*.

Comme dans un abaque à n plans il faut, pour que l'ensemble des plans forme bloc, fixer directement ou indirectement $(n - 1)$ plans par rapport au n^{e} , les éléments de fixation doivent être au nombre de $6(n - 1)$ au moins et de $9(n - 1)$ au plus.

Considérons maintenant les éléments de résolution. Nous avons supposé que l'abaque considéré est du type *non composé*. L'hypothèse de l'unicité de l'opération de résolution implique que l'abaque ne comporte qu'un contact de résolution. Ce contact sera constitué de deux ou de trois éléments, suivant qu'il s'agira d'un contact tangentiel ou d'un contact ponctuel.

Il y aura dès lors en tout, dans un abaque complet non composé

à n plans, $6(n - 1) + 2$ systèmes cotés au moins et $9(n - 1) + 3$ systèmes cotés au plus. Et l'on peut dès lors écrire

$$2(3n - 2) \leq N \leq 3(3n - 2)$$

ou encore, en désignant par $N_{\min.}$ et $N_{\max.}$ les nombres minimum et maximum de variables représentées,

$$N_{\min.} = 2(3n - 2)$$

$$N_{\max.} = 3(3n - 2)$$

Nous croyons utile d'insister sur le fait que ces formules ne concernent, conformément à la définition des abaques complets qui a été donnée à la page 25, que les représentations nomographiques absolument générales.

Structure générale et propriétés du champ nomographique

Nous avons dressé, à partir des formules qui viennent d'être établies, un tableau qui donne, pour différents nombres de plans, les nombres minimum et maximum des variables qui peuvent être représentées (voir Tableau I).

L'examen de ce tableau permet de dégager quelques propriétés importantes des représentations nomographiques complètes.

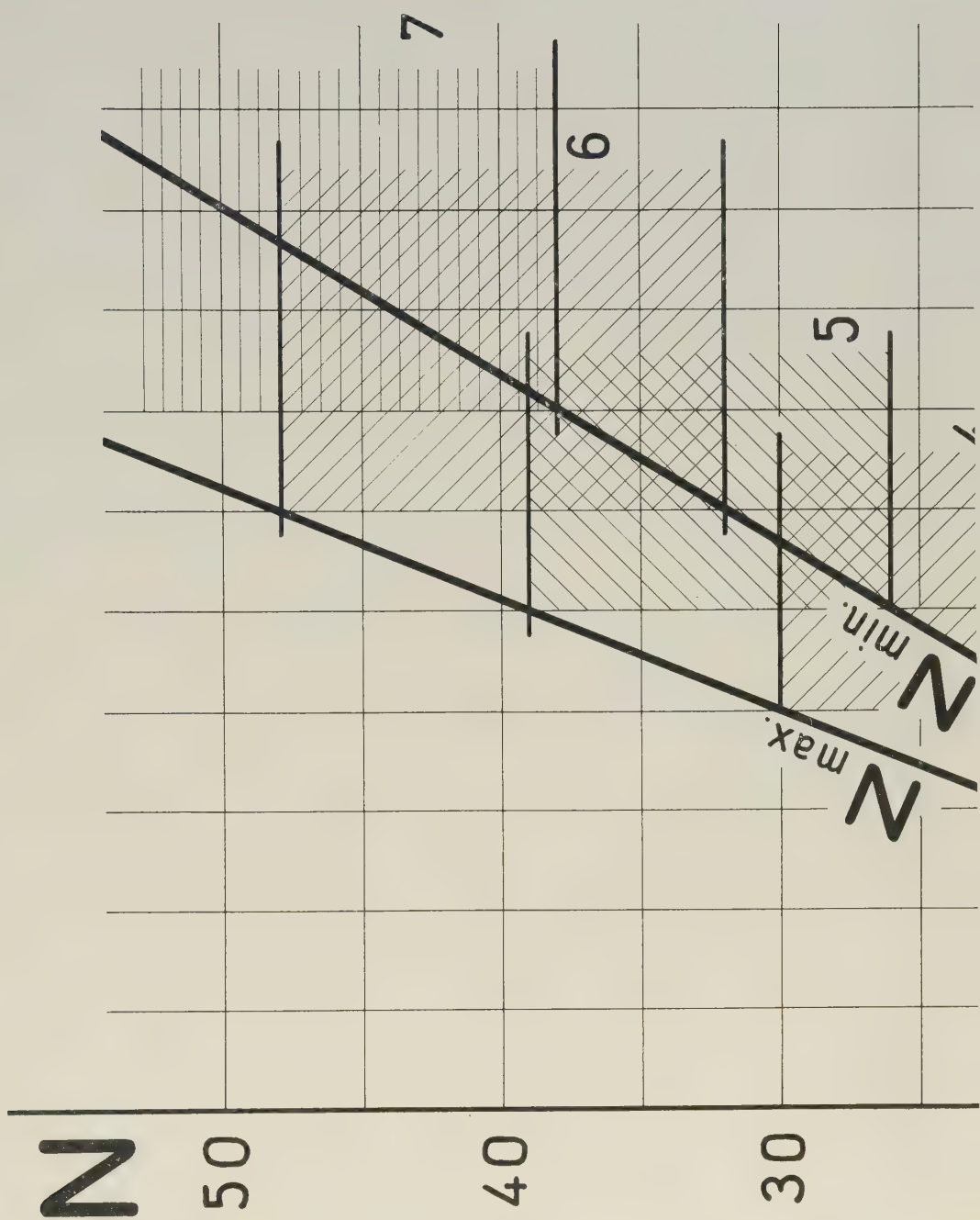
PROPRIÉTÉ I. — Il existe certains nombres de variables pour lesquels il n'y a aucune possibilité de représentation nomographique complète non composée.

Le tableau montre en effet cette propriété remarquable, que les relations à 4, 5, 6, 7, et 13 variables ne peuvent pas être représentées par des abaques complets non composés.

PROPRIÉTÉ II. — L'augmentation des possibilités pour le nombre de plans en fonction du nombre des variables n'est pas monotone.

n	N min.	N max.
1	2	3
2	8	12
3	14	21
4	20	30
5	26	39
6	32	48
7	38	57
etc.	etc.	etc.

Tableau I.



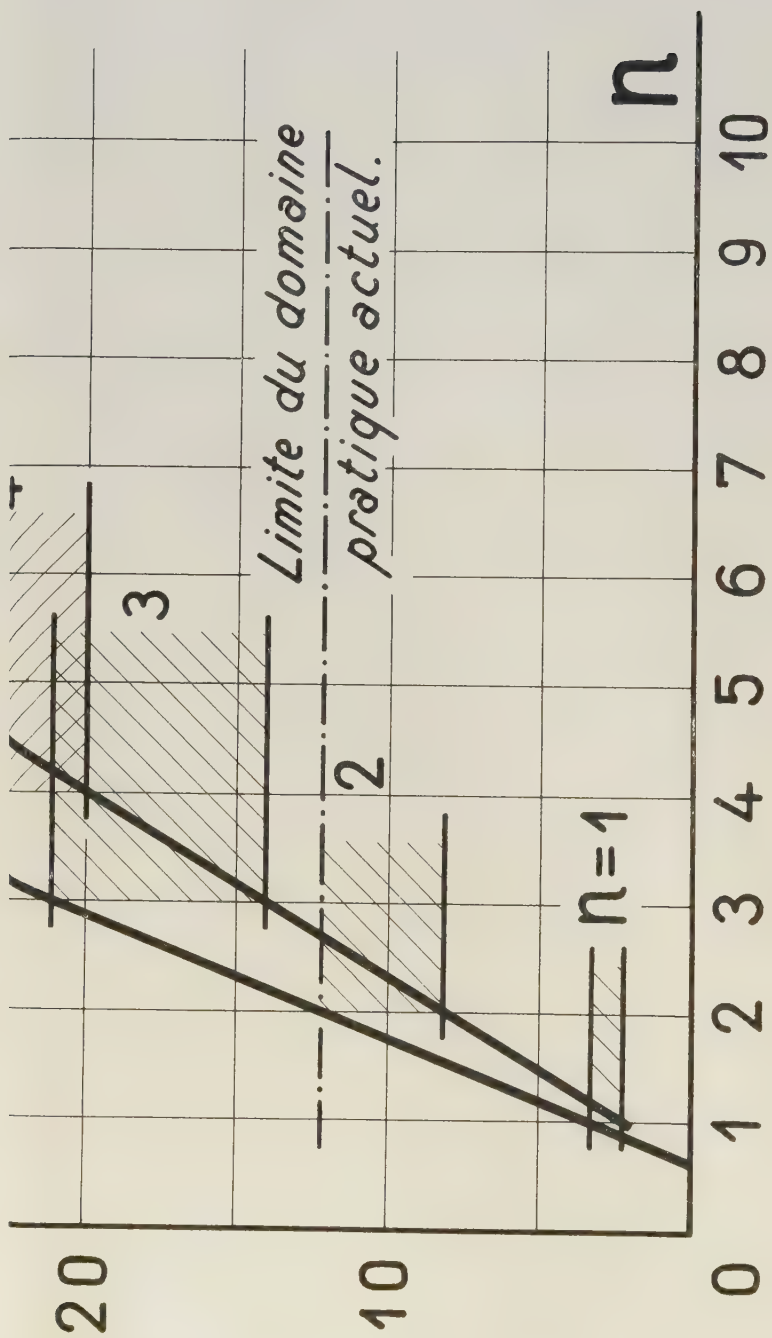


Fig. 5.

En effet, deux nombres de variables étant donnés, on ne peut pas affirmer *a priori* qu'au plus élevé des deux correspondra le plus grand nombre de possibilités.

EXEMPLE : Pour $N = 21$ on peut avoir $n = 3$ ou $n = 4$ (deux possibilités) tandis que pour $N = 22$ on a nécessairement $n = 4$ (une possibilité seulement).

PROPRIÉTÉ III. — *Un nombre de possibilités étant donné a priori on peut toujours trouver un nombre de variables à partir duquel ce nombre de possibilités est atteint ou dépassé.*

C'est ainsi qu'à partir de $N = 14$ il y a toujours au moins une valeur de n admissible, qu'à partir de $N = 26$ il y en a toujours au moins deux, et ainsi de suite.

La figure 5 (hors-texte) dans laquelle nous avons représenté graphiquement les deux fonctions

$$N = 2(3n - 2)$$

$$N = 3(3n - 2)$$

et où nous avons indiqué au moyen de hachures les intervalles

$$N \text{ min.} \rightarrow N \text{ max.}$$

correspondant aux valeurs successives de n , donne une représentation imagée des propriétés qui ont été déduites du tableau.

La figure met à jour la *structure* du champ de la Nomographie. On y remarque l'apparition progressive des chevauchements des zones hachurées quand n augmente et on voit comment ces chevauchements intéressent des nombres de zones de plus en plus élevés.

Nous avons indiqué en trait mixte la limite du domaine dans lequel se placent les applications actuelles de la Nomographie.

La figure permet ainsi de situer la Nomographie pratique actuelle dans le cadre de la Nomographie générale. Elle met notamment en évidence la nature lacunaire du domaine qui correspond aux petits nombres de variables et montre que les méthodes actuelles se localisent en fait dans une zone d'un caractère très particulier.

Principe d'une représentation schématique de la structure des abaques à plans superposés

L'étude des propriétés morphologiques des abaques à plans mobiles superposés implique la possession d'un système simple de représentation de la structure de ces abaques.

La représentation schématique dont nous proposons l'emploi est basée sur les principes suivants * :

1° — Chaque plan de l'abaque est représenté par une droite horizontale.

2° — Ces droites sont disposées les unes au-dessous des autres, à intervalles réguliers, dans un ordre qui correspond à celui dans lequel sont positionnés les plans successifs lors de l'emploi de l'abaque.

3° — Chaque système géométrique est représenté par un symbole qui en caractérise la nature.

4° — Chaque symbole est placé sur la ligne qui correspond au plan auquel appartient le système qu'il représente.

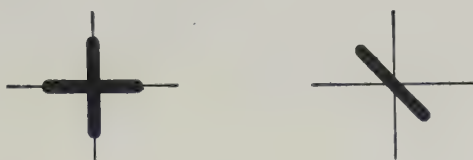
5° — Les symboles qui représentent des systèmes dont les éléments participent à un même contact sont disposés sur une verticale, qui peut être matérialisée par un trait pour faciliter la lecture du schéma.

6° — Les symboles relatifs aux systèmes géométriques non dégénérés et non constants sont les suivants :

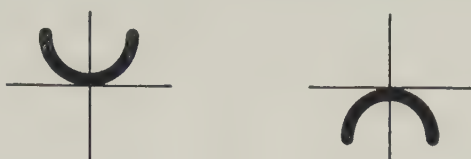


pour les systèmes dont les éléments participent à un contact ponctuel et sont répartis sur *trois* plans ;

* C. R. de l'Ac. des Sc., T. 224, pp. 181-183.



pour les systèmes dont les éléments participent à un contact ponctuel et sont répartis sur *deux* plans ;



pour les systèmes dont les éléments participent à un contact tangentiel.

Dans le premier et le troisième cas, les symboles sont utilisés, pour les plans successifs, dans l'ordre où ils sont placés ci-dessus. Dans le deuxième cas, la croix correspond aux deux faisceaux qui sont portés par le même plan et le trait au faisceau isolé.

7° — Les systèmes de *points* cotés (échelles ponctuelles provenant de la dégénérescence de faisceaux) sont représentés par le symbole



8° — Les éléments *non cotés* sont représentés par des symboles dont la forme est identique à celle des symboles qui représentent les éléments cotés dont ils dérivent, mais ils sont dessinés en traits fins.

Exception est seulement faite pour les points, que l'on symbolisera par de petits cercles évidés.

9° — Les éléments qui participent au contact de *résolution* sont entourés d'une circonférence quand on désire préciser quels sont ces éléments.

10° — Pour indiquer que des plans sont *groupés*, on borde les lignes correspondantes d'un trait fort disposé verticalement à la droite du schéma.

Les sous-groupes s'indiqueront de la même manière.

On pourra être ainsi amené à tracer plusieurs traits parallèles. Dans ce cas on rejettera, pour la clarté des indications, les traits les plus longs vers l'extérieur.

11° — Pour la représentation schématique des *abagues spéciaux* on s'inspirera des principes ci-dessus, en se réservant de donner sous la forme que l'on jugera la mieux appropriée les indications complémentaires qui pourraient être nécessaires à la compréhension des schémas.

12° — Pour représenter des *abagues composés* on schématisera la structure des abagues simples constitutifs, en indiquant par des lettres ou par des signes conventionnels quels sont les éléments communs.

REMARQUE. — On pourra, pour faciliter le repérage des éléments, numérotter sur les schémas les plans et les contacts. On utilisera dans ce cas des chiffres romains pour les plans et des chiffres arabes pour les contacts.

Formes.

Nous donnerons le nom de *formes* aux schémas obtenus par la méthode de représentation que nous venons d'indiquer et nous leur étendrons la terminologie donnée plus haut pour les abagues *.

A un même abaque correspondront plusieurs formes, caractérisées chacune par un ordre déterminé de succession des plans et par une disposition transversale particulière des contacts.

L'ordre de succession des plans dépend des conditions d'emploi de l'abaque. La disposition transversale des contacts, par contre, ne relève que de la représentation.

Il suffira, pour définir la structure d'un abaque, de donner une quelconque des formes sous lesquelles il peut être schématisé.

Nous donnerons plus loin des indications quant au choix des formes de référence à utiliser en pratique.

* C. R. de l'Ac. des Sc., T. 224, pp. 1693-1694.

Exemples

Nous donnons ci-après, pour fixer les idées, quelques exemples de représentations schématiques.

EXEMPLE I. — La figure 6 donne le schéma d'un abaque à deux plans à contacts ponctuels.

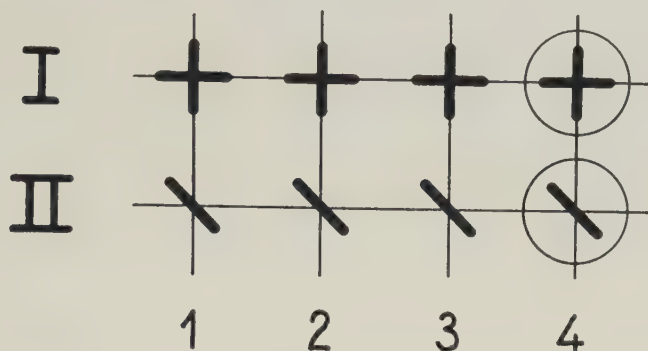


Fig. 6

Le premier plan (alignement I) porte quatre systèmes cotés, formés chacun de deux familles de lignes entrecroisées et le second (alignement II), quatre systèmes formés chacun d'une famille unique.

Le second plan peut être fixé par rapport au premier en réalisant les trois contacts de position 1, 2, 3. Ce sont des contacts ponctuels. Ils consistent à faire passer, pour chacun d'eux, une ligne de la famille II par le point de rencontre de deux lignes des familles I.

Quand le plan est fixé le contact de résolution 4 permet de déterminer l'inconnue, tout comme dans un abaque à entrecroisement à plan unique.

EXEMPLE II. — La figure 7 donne, comme second exemple, le schéma d'un abaque à trois plans dont les contacts de position sont tangentiels et le contact de résolution ponctuel.

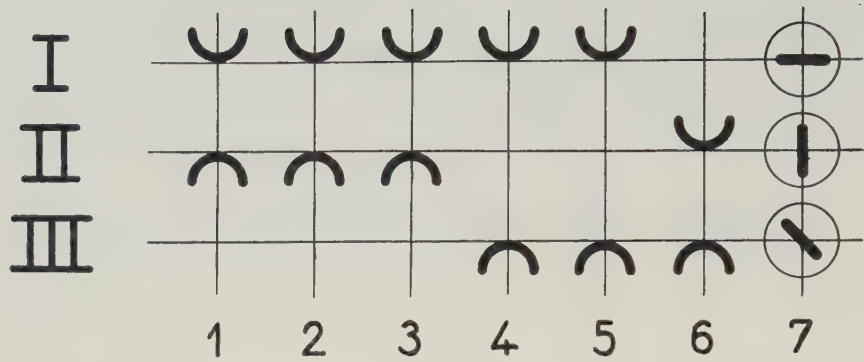


Fig. 7

Le plan II est fixé par rapport au plan I (contacts de position 1, 2, 3), tandis que le plan III est fixé par rapport aux plans I (contacts 4, 5) et II (contact 6).

Le contact de résolution 7, dont les éléments sont répartis sur les trois plans, détermine l'inconnue.

EXEMPLE III. — La figure 8 donne enfin, pour fixer les idées en ce qui concerne les cas plus particuliers, quelques représentations schématiques de contacts qui renferment des éléments dégénérés ou dérivés.

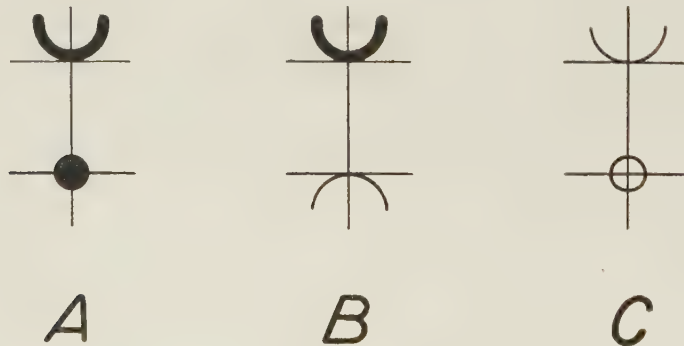


Fig. 8

Les contacts représentés sont :

A — Un contact entre une ligne appartenant à un faisceau et un point faisant partie d'une échelle (contact tangentiel dégénéré);

B — Un contact entre une ligne faisant partie d'un faisceau et une ligne constante (contact tangentiel dérivé);

C — Un contact entre une ligne constante et un point constant (contact tangentiel dégénéré et dérivé).

DEUXIEME PARTIE

Etude des formes tangentielles complètes à plans indépendants

Avertissement

Les abaques tangentiels complets sont caractérisés, comme nous l'avons indiqué plus haut, par le fait que tous leurs contacts sont des contacts tangentiels et qu'ils ont lieu uniquement entre des lignes cotées, à l'exclusion de tout élément dégénéré ou constant.

Nous classerons les abaques tangentiels complets en deux catégories, suivant que tous les plans peuvent être positionnés individuellement les uns à la suite des autres ou que certains d'entre eux doivent être groupés avant leur mise en place*.

Les abaques de la première catégorie seront dits, suivant la terminologie adoptée plus haut, ABAQUES A PLANS INDEPENDANTS, ceux de la seconde ABAQUES A PLANS GROUPEES.

Nous nous proposons d'établir, dans cette seconde partie, quelques propriétés relatives aux abaques à plans indépendants, réservant pour la troisième partie l'étude des abaques à plans groupés ainsi que l'examen des conditions dans lesquelles les deux caractères peuvent coexister dans un même abaque.

* Les deux types ne sont d'ailleurs pas toujours essentiellement distincts, certains abaques pouvant fonctionner à plans indépendants pour la détermination de variables déterminées et exiger le groupement de certains plans quand d'autres variables sont prises comme inconnues.

Nous attirons l'attention sur le fait que toute affirmation contenue dans cette 2^e partie suppose IMPLICITEMENT l'indépendance des plans et ne présume rien quant aux possibilités pouvant résulter de groupements de plans, même dans des formes étudiées comme formes à plans indépendants.

Contacts tangentiels

Les contacts tangentiels, comme nous l'avons rappelé dans la première partie de ce travail, sont des relations de position d'éléments géométriques qui, dans leur forme la plus générale, impliquent la tangence de deux lignes. Nous avons indiqué que les éléments de ces contacts peuvent se trouver dans un même plan ou appartenir à des plans différents.

Les contacts tangentiels dont les éléments appartiennent à un même plan sont nécessairement des contacts de résolution. Leur emploi ne peut se concevoir que dans des abaques à plan unique. Ces contacts ne doivent donc pas être considérés ici.

Les contacts tangentiels qui seront utilisés dans ce qui suit seront toujours constitués de deux éléments appartenant à des plans différents.

Éléments primaires et secondaires.

Nous appellerons dans chaque contact élément PRIMAIRE, l'élément se trouvant dans le plan qui, lors de l'emploi de l'abaque, est mis en place en premier lieu, élément SECONDAIRE, l'élément se trouvant dans le plan positionné ensuite.

Les éléments primaires ne jouent aucun rôle lors de la mise en place des plans auxquels ils appartiennent. Ce sont les éléments secondaires qui, formant des contacts avec les éléments primaires des plans déjà fixés, jouent un rôle actif lors du positionnement des plans dont ils sont solidaires.

La distinction entre éléments primaires et secondaires est fondamentale en ce qui concerne les contacts de fixation car, comme on le

voit, ces éléments jouent des rôles essentiellement différents lors du positionnement des plans.

Remarquons cependant que la notion d'élément primaire ou secondaire est purement relative. Elle dépend essentiellement de l'ordre dans lequel on positionne les plans. Tel élément, primaire dans certaines conditions d'utilisation de l'abaque, peut devenir secondaire dans d'autres conditions, et inversement.

Par contre, la distinction entre éléments primaires et secondaires ne présente aucun intérêt pour les contacts de résolution. En effet, les rôles joués dans ces contacts par les deux éléments sont identiques.

Dans les représentations schématiques, le symbole qui représente un élément primaire se trouve toujours *au-dessus* du symbole représentant l'élément secondaire qui forme contact avec lui. L'élément primaire est représenté par une demi-circonférence ayant sa concavité tournée vers le haut, l'élément secondaire par une demi-circonférence ayant sa concavité tournée vers le bas.

Caractères fondamentaux de la structure des abaques complets à contacts tangentiels et plans indépendants

Les caractères fondamentaux de la structure des abaques complets à contacts tangentiels et plans indépendants résultent de deux constatations évidentes, à savoir que, lors de l'emploi de tels abaques :

1° — *Chaque plan doit pouvoir être fixé par rapport à l'ensemble des plans mis en place avant lui ;*

2° — *Tous les plans jouent un rôle effectif dans l'économie générale de l'abaque auquel ils appartiennent.*

On peut déduire de ces constatations, pour les abaques du type envisagé, les propriétés structurales suivantes :

PROPRIETE I. — *Chaque plan, sauf le premier, possède trois éléments secondaires de fixation et n'en possède que trois* *.

En effet chaque plan, à l'exception du premier, est fixé par rapport aux plans qui précèdent par trois contacts de position et trois seulement.

PROPRIETE II. — *Le premier plan possède trois éléments primaires de fixation formant contact avec les éléments secondaires du deuxième plan.*

Le second plan doit toujours être fixé par rapport au premier, ce qui justifie la propriété.

PROPRIETE III. — *Chaque plan doit porter, en plus des éléments impliqués dans les propriétés I et II, au moins un élément supplémentaire. Cet élément peut être un élément primaire de fixation ou de résolution, sauf en ce qui concerne le dernier plan pour lequel c'est obligatoirement l'élément secondaire de résolution.*

Chaque plan intermédiaire doit intervenir dans le positionnement des plans qui suivent ou participer à l'établissement du contact de résolution, ce qui justifie la propriété pour ces plans.

Le premier plan ne peut servir uniquement à fixer le second, car sinon on pourrait le supprimer et prendre ce second plan comme plan initial.

Quant au dernier plan, il ne peut en fixer d'autres. Pour intervenir dans l'emploi de l'abaque, il doit porter l'élément secondaire de résolution (qui ne pourrait d'ailleurs se trouver plus haut, sous peine de rendre inutiles les plans qui suivraient le plan dont il serait solidaire).

PROPRIETE IV. — *Le dernier plan ne peut comporter que les éléments impliqués dans les propriétés I et III.*

En effet si le dernier plan comportait d'autres éléments que ceux qui sont envisagés dans l'énoncé, ces éléments ne pourraient être que des éléments de fixation. Ils ne pourraient jouer aucun rôle puisqu'il n'y a plus de plans à fixer après le plan considéré.

* Il est entendu que nous désignons par *élément* l'ensemble des lignes cotées auxquelles cet élément est censé appartenir.

REMARQUE. — Il résulte des propriétés I à IV que chaque plan d'un abaque tangentiel complet, à l'exception du dernier, comporte quatre éléments ou plus de quatre éléments. Le dernier plan en comporte obligatoirement quatre.

PROPRIETE V. — *Le premier plan d'un abaque tangentiel complet peut comporter au maximum $2n$ éléments, n étant le nombre de plans de l'abaque.*

Le nombre des contacts étant, pour un abaque complet à n plans, égal à $(3n - 2)$, l'abaque comportera nécessairement $(3n - 2)$ éléments primaires.

Ces éléments pourront se trouver sur le premier plan, à l'exception d'au moins un élément par plan à partir du second jusqu'à l'avant dernier, ce qui porte à $(n - 2)$ le nombre minimum des éléments primaires qui ne peuvent pas figurer sur le premier plan.

Il pourra donc y avoir au maximum, dans le premier plan,

$$3n - 2 - (n - 2) = 2n$$

éléments.

PROPRIETE VI. — *Un plan de rang k , pour $k \neq 1$, peut comporter au maximum*

$$2(n - k + 2)$$

éléments, n étant le nombre de plans de l'abaque.

Chaque plan à partir du second comporte 3 éléments secondaires de position. Soit dès lors une forme tangentielle. Aucun élément ne pouvant se trouver sous un élément secondaire et le nombre total des contacts étant $(3n - 2)$, le nombre des positions *possibles* pour les éléments (y compris les éléments secondaires) sera :

Pour le 2^a plan : $3n - 2$

Pour le 3^e plan : $3n - 2 - 3$

Pour le 4^e plan : $3n - 2 - 2 \times 3$

Pour le 5^e plan : $3n - 2 - 3 \times 3$

— — — — —

Pour le k^e plan : $3n - 2 - (k - 2) 3$

Toutes ces positions ne peuvent cependant pas être occupées simultanément dans un plan de rang k donné car alors :

1° — Les plans situés en avant du plan k n'interviendraient pas dans le fonctionnement de l'abaque ;

2° — Les plans situés éventuellement entre le plan k et le dernier plan ne pourraient pas être pourvus de leur élément primaire imposé.

Il faudra donc retirer du plan k *au moins* un élément primaire qui sera rejeté vers le haut pour réaliser la soudure avec les plans qui précèdent et un élément par plan situé après le plan k , à l'exception du dernier, soit en tout

$$1 + (n - k - 1) = n - k$$

éléments.

En tenant compte de la valeur trouvée plus haut pour le nombre de positions possibles il vient, pour le nombre E des éléments pouvant figurer effectivement sur le plan de rang k :

$$\begin{aligned} E &= 3n - 2 - 3(k - 2) - (n - k) \\ &= 2(n - k + 2) \end{aligned}$$

C'est l'expression donnée dans l'énoncé *.

Formes ordonnées - Génération des formes tangentiellles complètes à plans indépendants

On peut toujours, dans un schéma nomographique, disposer transversalement les contacts dans un ordre arbitraire choisi *a priori*.

Nous appellerons FORME ORDONNÉE tout schéma dans lequel les contacts auront été rangés de manière telle :

* Pour $k = 2$ la formule donne $E = 2n$, résultat identique à celui trouvé plus haut pour le premier plan. Il doit évidemment en être ainsi puisque le premier et le second plan peuvent toujours être permutés entre eux.

1° — Que tout élément *secondaire* n'ait à sa droite, comme autres éléments secondaires, que des éléments situés au même niveau que lui ou à des niveaux inférieurs ;

2° — Que, dans chaque groupe de contacts dont les éléments secondaires sont situés à un même niveau, chaque élément *primaire* n'ait à sa droite que des éléments primaires situés au même niveau que lui ou plus bas (exception pouvant être faite pour le contact de résolution qui peut être rejeté à l'extrême droite du schéma quel que soit son élément primaire).

On voit que, quand une forme est ordonnée, les seuls relèvements possibles pour les éléments, quand on lit le schéma de gauche à droite, sont des relèvements d'éléments primaires. Ils ne peuvent se produire qu'au droit d'abaissements d'éléments secondaires, sauf pour l'élément relatif au contact de résolution.

Caractères communs.

On pourra mettre en évidence, pour toutes les formes ordonnées relatives aux abaqes tangentiels complets à plans indépendants, des caractères communs.

Chaque plan en effet, sauf le premier et le dernier, comporte trois éléments secondaires. Le premier n'en comporte pas et le dernier en comporte 4.

Ces éléments se disposent, quand on ordonne une forme, suivant un dessin type constitué d'une ligne brisée qui traverse le schéma en diagonale.

Le premier plan comporte, parmi ses éléments primaires, 3 éléments qui forment contact avec les 3 éléments secondaires du deuxième plan. Ces 3 éléments se trouvent rejetés en tête (coin supérieur gauche) du schéma.

Enfin chaque plan, sauf le dernier, comporte, en plus des éléments repris ci-dessus, au moins encore *un* élément primaire.

La figure 9 montre, dans une forme ordonnée à cinq plans, les caractères ainsi dégagés. Ils se ramènent aux deux points essentiels suivants :

1° — *Tous les éléments situés à gauche de la ligne brisée LL' (éléments secondaires A et éléments primaires B) sont imposés. Ils peuvent toujours être placés a priori et aucun autre élément ne peut être introduit dans cette zone.*

2° — *Les éléments restants (éléments C) sont disposés à droite de la ligne LL' d'une façon arbitraire, avec cette condition qu'il doit s'en trouver au moins un par ligne.*

Génération.

On peut générer facilement les formes ordonnées en tenant compte de ces propriétés. Il suffit de mettre en place la diagonale des éléments imposés et de disposer à droite de cette diagonale, en les ordonnant à leur tour, les éléments restants tout en ayant soin d'en placer *au moins un* par ligne*.

Pour obtenir toutes les formes possibles relatives à un nombre de plans donné, il suffit d'épuiser les possibilités de disposition des éléments arbitraires à droite de LL'.

Toute forme que l'on pourrait obtenir par une autre voie ne sera pas une forme ordonnée et se ramènerait, en modifiant l'ordre transversal des contacts, à l'une des formes obtenues par le procédé ci-dessus.

Plans conjugués

Nous appellerons PLAN CONJUGUE d'un plan donné tout plan situé après lui dans la forme à laquelle il appartient, et qui est en relation avec lui par un ou plusieurs contacts.

Il résulte immédiatement de cette définition que tout plan, sauf le dernier, a au moins un conjugué et au plus un nombre de conjugués égal au nombre de plans situés après lui.

* Avec cependant cette restriction évidente qu'il faudra éviter de constituer à l'intérieur de la forme que l'on construit une forme autonome, à nombre de plans réduit, pouvant être séparée de l'ensemble.

Exemple : En complétant la troisième ligne d'une forme à quatre plans par quatre éléments primaires on fait apparaître, dans les deux dernières lignes, une forme à deux plans qui peut être détachée de la forme de départ. Le schéma obtenu ne correspond donc pas à un abaque à quatre plans, mais en réalité à un abaque à deux plans seulement.

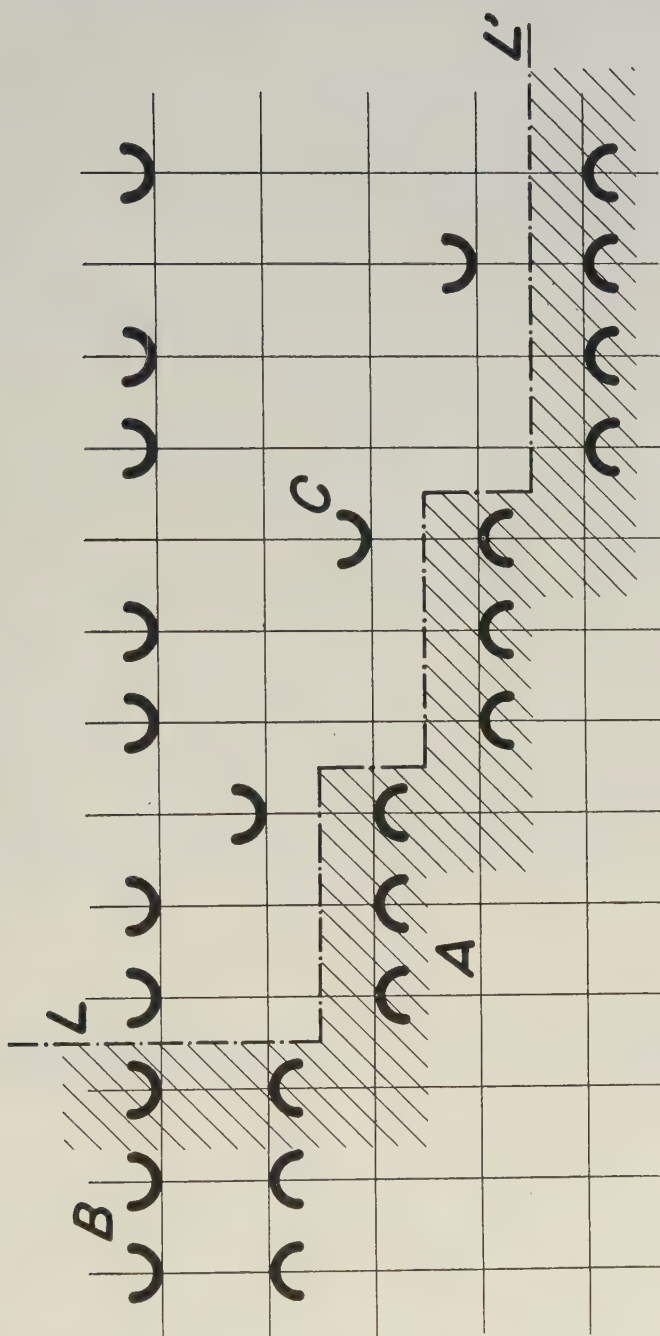


Fig. 9

Nous dirons, inversement, qu'un plan EST CONJUGUE des plans qui précèdent et avec lesquels il est en relation par un ou par plusieurs contacts.

Il résulte de cette seconde définition :

- que le second plan est toujours conjugué du premier ;
- que le troisième plan est conjugué de l'un des deux premiers ou des deux simultanément ;
- qu'à partir du quatrième, chaque plan, à l'exception du dernier, peut être conjugué de un, de deux ou de trois plans qui précèdent ;
- que le dernier plan est conjugué de deux, de trois ou de quatre plans qui précèdent *.

Nous appellerons enfin ORDRE DE CONJUGAISON de deux plans appartenant à une même forme, le nombre de contacts qui existent entre ces plans.

Les notions de plans conjugués et d'ordre de conjugaison seront d'un emploi commode.

REMARQUE. — Il pourra être utile, dans certains cas, de faire abstraction du contact de résolution pour ne porter l'attention que sur les seuls contacts de fixation.

On spécifiera alors explicitement que les relations de conjugaison envisagées ne concernent que le positionnement des plans à l'exclusion de la résolution.

Mouvement des plans - Formes équivalentes

Définitions.

Nous appellerons MOUVEMENT DE PLANS toute opération ayant pour résultat de modifier l'ordre de succession des plans d'un abaque donné.

* Ceci suppose évidemment $n \neq 2$. Dans ce cas le dernier plan ne peut pas être conjugué d'un seul autre plan, car sinon il formerait avec lui un abaque à deux plans.

Un mouvement de plans a pour but de changer les conditions d'emploi d'un abaque, soit afin d'en rendre l'utilisation plus commode, soit plus généralement afin de permettre de prendre d'autres variables comme inconnues. Il ne peut s'effectuer que dans certaines conditions, au sujet desquelles nous donnerons plus loin quelques indications.

La notion de mouvement de plans étant acquise, on conçoit immédiatement que des formes différentes puissent se ramener les unes aux autres par des modifications apportées à l'ordre de positionnement des plans, suivies d'aménagements convenables dans l'ordre de succession horizontal des contacts.

Des formes qui peuvent se ramener les unes aux autres par des mouvements de plans suivis de reclassements horizontaux des contacts seront dites FORMES EQUIVALENTES.

On remarquera que le seul facteur intéressant, dans l'opération qui permet de ramener l'une à l'autre deux formes équivalentes, est le mouvement des plans. Le reclassement des contacts ne présente qu'un intérêt de pure forme car il n'affecte que la *présentation* des schémas et aucunement leurs propriétés.

C'est pourquoi nous considérons comme identiques les formes que l'on peut ramener les unes aux autres en modifiant simplement l'ordre de succession des contacts et il sera toujours sous-entendu, quand nous parlerons de mouvement de plans, que cette dénomination inclut l'opération secondaire de reclassement des contacts.

Exécutions des mouvements de plans.

Tout mouvement de plans dans une forme peut être décomposé en une succession d'opérations partielles consistant chacune à déplacer *un seul plan* vers le bas (en avant) ou vers le haut (en arrière).

Au cours de ces changements, des éléments qui dans la forme se trouvent sur une même verticale restent sur cette verticale, puisque des éléments qui participent à un même contact avant le mouvement participent encore à ce contact quand le mouvement est terminé. Seule la nature des éléments (primaire ou secondaire) change quand la position relative de deux éléments est modifiée.

Un mouvement de plans est dès lors facile à exécuter. On choisit une nouvelle disposition de plans *a priori* et on place les éléments des contacts sur les nouveaux alignements, sans modifier leur nature quand la position relative des éléments n'est pas changée, en transformant l'élément primaire en élément secondaire et vice versa quand la position relative des deux éléments est inversée par le mouvement.

Pour qu'un mouvement présente un intérêt pratique il faut évidemment que le nouveau schéma auquel il conduit présente encore la structure d'une forme. Ce n'est pas toujours le cas.

Mouvements de plans et résolution.

L'étude des conditions de mouvement des plans présente un intérêt fondamental, car c'est de ces conditions que dépend la possibilité, pour certaines variables représentées dans un abaque, d'être prises pour inconnues.

Nous avons vu, en effet, que seules peuvent être déterminées les variables dont les éléments représentatifs appartiennent au dernier plan ou forment contact avec des éléments de ce plan. Et cette simple remarque montre que le problème du mouvement des plans et celui de la résolution sont intimement liés.

Nous mettrons en évidence ici quelques propriétés du mouvement des plans et nous montrerons ultérieurement, dans un paragraphe consacré à la résolution, les incidences que peuvent avoir les conditions de mouvement des plans sur les conditions d'utilisation des abaques constitués par ces plans.

Conditions de mouvement des plans.

L'étude du mouvement des plans peut s'appuyer sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Tout mouvement de plans effectué dans une forme ne peut affecter que la nature des éléments, c'est-à-dire transformer des éléments primaires de contact en éléments secondaires et inversement.*

La répartition des éléments entre les différents plans et l'ordre de conjugaison des divers couples de plans ne sont pas modifiés.

LEMME II. — *Dans les plans que l'on déplace vers le bas, les seules modifications qui peuvent se produire sont des transformations d'éléments primaires en éléments secondaires, dans les plans que l'on déplace vers le haut, des transformations d'éléments secondaires en éléments primaires.*

La propriété résulte immédiatement de ce qu'un élément primaire n'a aucun élément au-dessus de lui et un élément secondaire aucun élément au-dessous de lui.

LEMME III. — *Les transformations envisagées dans le lemme précédent ne peuvent se produire, pour un plan qui descend, que quand il passe sur un de ses plans conjugués et, pour un plan qui monte, que quand il passe sur un plan dont il est conjugué.*

En effet les transformations n'intéressent que des éléments se trouvant deux à deux sur une même verticale. Ces éléments forment contact entre eux et appartiennent toujours à des plans conjugués.

LEMME IV. — *A chaque transformation de la nature d'un élément dans un plan en mouvement correspond, dans le plan sur lequel il passe au moment du changement, une transformation inverse.*

LEMME V. — *Le nombre des transformations correspondant à un changement de position relative de deux plans est égal à l'ordre de conjugaison de ces plans.*

LEMME VI. — *Les transformations résultant de mouvements donnés de différents plans dépendent seulement des positions initiales et finales des plans et non de la nature des mouvements effectués pour passer de la configuration initiale à la configuration finale.*

Sur chaque verticale en effet la nature des éléments est déterminée par leurs positions relatives. Ces positions ne dépendent que de l'ordre de succession des plans.

*
* *

Nous pouvons dès lors préciser par les théorèmes donnés ci-après quelques propriétés des mouvements de plans, et en particulier les con-

ditions dans lesquelles certains plans à quatre éléments peuvent être amenés en dernière position.

THEOREME I. — *Tout plan appartenant à une forme complète à contacts tangentiels peut être déplacé arbitrairement dans la zone limitée vers le bas par son premier plan conjugué, vers le haut par le dernier plan* dont il est conjugué.*

Soit en effet le mouvement d'un plan dans la zone considérée. Ce mouvement n'entraîne, en vertu du lemme III, aucun changement quant à la nature des éléments du plan déplacé car il ne modifie pas la position relative de ce plan par rapport aux plans avec lesquels il est conjugué.

COROLLAIRE. — *On peut toujours permuter entre eux deux plans voisins qui ne sont pas conjugués.*

THEOREME II. — *Un plan ne peut généralement pas être déplacé en dehors de la zone définie dans l'énoncé du théorème I sans entraîner le mouvement d'autres plans de la forme.*

Le déplacement d'un plan vers le bas, en passant en-dessous d'un ou de plusieurs plans qui lui sont conjugués, transforme des éléments primaires du plan en mouvement en éléments secondaires (en vertu des lemmes II et III).

De même le transport d'un plan vers le haut, au-dessus d'un ou de plusieurs plans dont il est conjugué, transforme dans ce plan des éléments secondaires en éléments primaires.

Dans les deux cas la structure normale — 3 éléments secondaires, sauf si le plan en mouvement devient le premier ou le dernier plan de la forme (voir exceptions ci-dessous) — ne peut être éventuellement rétablie que par le mouvement d'un ou de plusieurs autres plans de la forme.

EXCEPTIONS. — Les deux premiers plans peuvent toujours être

* En considérant successivement les plans de haut en bas dans la représentation schématique.

permutés entre-eux. Il en est de même pour les deux derniers si l'avant-dernier plan est un plan à quatre éléments.

THEOREME III. — *Un plan donné ne peut généralement pas être amené au-dessous d'un ensemble de plans qui lui sont conjugués et tels que la somme des ordres de conjugaison correspondants soit supérieure à trois.*

En effet, le passage d'un plan sur des plans qui lui seraient conjugués et tels que la somme des ordres de conjugaison correspondants soit supérieure à trois, ferait apparaître dans ce plan, en vertu des lemmes II, III et V, des éléments secondaires dont le nombre serait, lui aussi, supérieur à trois.

Ces éléments secondaires ne pourraient pas être retransformés en éléments primaires par d'autres mouvements. Ils devraient donc tous subsister dans le plan, ce qui est impossible sauf dans le cas d'un plan à quatre éléments amené en dernière position (voir exception ci-après).

EXCEPTION. — Dans le seul cas où le plan donné est le premier plan de l'abaque et comporte quatre éléments, la somme définie plus haut peut être égale à quatre* sans qu'il en résulte a priori une impossibilité pour ce plan d'être amené en dernière position.

THEOREME IV. — *Un plan donné ne peut généralement pas être amené au-dessus d'un ensemble de plans dont il est conjugué et tels que la somme des ordres de conjugaison correspondants soit supérieure au nombre d'éléments primaires du plan.*

La propriété résulte immédiatement de ce que le mouvement considéré transforme en éléments primaires, dans le plan que l'on déplace et en vertu des lemmes II, III et V, des éléments secondaires dont le nombre correspond chaque fois à l'ordre de conjugaison des plans au-dessus desquels on passe.

Il faut dès lors que, par d'autres mouvements de plans, on puisse redonner au plan considéré les éléments secondaires dont il a été privé (voir exceptions ci-après).

* Le plan doit bien être initialement le premier plan de l'abaque, car sinon il ne pourrait avoir qu'un seul plan conjugué avec un ordre de conjugaison égal à un.

Ces éléments ne pourront provenir que d'éléments primaires pré-existant dans le plan et qui doivent donc bien, dans le cas général, être en nombre au moins égal au nombre des éléments secondaires disparus.

EXCEPTIONS. — Le théorème ne s'applique évidemment pas au passage éventuel au-dessus du premier plan, un plan amené en seconde position pouvant toujours être permuté avec le plan de tête.

D'autre part le dernier plan ne possède pas d'élément primaire mais peut cependant être amené au-dessus d'un plan dont il serait conjugué, à condition que l'ordre de conjugaison soit égal à l'unité.

REMARQUE. — On peut généraliser facilement les théorèmes qui précèdent et les étendre au mouvement de groupes de plans que l'on déplacerait d'un seul bloc.

THEOREME V. — *Tout plan à quatre éléments qui est relié par une chaîne de conjugués successifs à quatre éléments au dernier plan de l'abaque*, peut être amené en dernière position.*

Soit K un plan à quatre éléments, situé dans le corps de l'abaque, et pour lequel la condition est satisfaite.

Amenons le plan K en dernière position.

Le plan K n'ayant qu'un élément primaire n'a qu'un seul plan conjugué. Soit L ce plan.

Le passage de K sur L entraîne, en vertu des lemmes II, III et IV, la transformation de l'élément primaire de K en élément secondaire et, dans L , la transformation d'un élément secondaire en élément primaire. Le mouvement n'a pas d'incidence sur les autres plans.

A partir de ce moment le plan K , comportant quatre éléments secondaires, présente bien le caractère d'un dernier plan et sa position est déterminée par rapport aux plans qui précèdent. Mais l'ensemble des plans ne présente plus la structure d'un abaque car le plan L , qui ne comporte plus que deux éléments secondaires, ne peut plus être fixé.

* Nous entendons par là que ce plan a un conjugué qui est lui-même un plan à quatre éléments, lequel à son tour a comme conjugué un nouveau plan à quatre éléments et ainsi de suite, le dernier conjugué de la série étant le dernier plan de la forme.

Rejetons le plan L en avant-dernière position, donc au-dessus du plan K , et soit M le conjugué unique de L .

Le passage de L sur M entraîne la transformation d'un élément primaire de L en élément secondaire et dans M , la transformation d'un élément secondaire en élément primaire.

Tous les plans peuvent alors être fixés, sauf M . Ce plan est à son tour rejeté contre le plan L et l'on continue ainsi pour les conjugués successifs jusqu'à ce que l'on aboutisse à un plan P dont le conjugué soit le dernier plan Q de la forme (considérée dans son état primitif).

Le rejet du plan P contre le plan O , déplacé immédiatement avant lui, fait passer P sur Q . Ce mouvement rétablit dans P une structure normale en y transformant un élément primaire en élément secondaire, tandis que dans le plan Q un des quatre éléments secondaires devient primaire, ce qui confère à ce plan le caractère de plan intermédiaire dont il doit maintenant jouer le rôle.

Dès ce moment tous les plans peuvent être positionnés et le plan K se trouve bien en dernière position.

COROLLAIRE. — *Si à partir d'un plan de rang p d'un abaque à n plans les $(n - p)$ plans restants sont des plans à quatre éléments, ces plans peuvent tous être amenés en dernière position.*

Pour chacun des $(n - p)$ plans considérés la condition énoncée dans le théorème est satisfaite.

En effet un quelconque de ces plans ne peut avoir qu'un conjugué ; ce conjugué est nécessairement un des plans à quatre éléments qui suivent. Ce plan, à son tour, a pour conjugué un plan à quatre éléments se trouvant après lui, et ainsi de suite. Et la chaîne ne peut se terminer qu'à un conjugué qui est le dernier plan de l'abaque.

Les plans considérés peuvent dès lors, en vertu du théorème, être tous amenés en dernière position.

REMARQUE. — La démonstration du théorème V donne la marche à suivre pour déterminer l'ordre de succession des plans qui permet de placer en dernière position un des plans visés par le théorème ou par son corollaire.

Il suffit de rabattre au-dessous du dernier plan de l'abaque, en inversant leur ordre de succession, les plans impliqués dans les conjugaisons successives à partir du plan que l'on désire amener en dernière position.

La figure 10 donne, à titre d'exemple, un abaque à cinq plans dans lequel les plans II, IV et V (forme supérieure) répondent aux conditions du théorème. Le plan II a été amené en dernière position (forme inférieure) moyennant adoption de l'ordre I — III — V — IV — II de succession des plans.

Critères d'équivalence

Il est évidemment intéressant de pouvoir reconnaître par un examen *direct* l'équivalence de formes données, sans devoir rechercher s'il est possible de les ramener les unes aux autres par des mouvements de plans.

Nous donnerons trois critères d'équivalence, basés respectivement sur l'examen :

- 1° — de la répartition des éléments entre les différents plans ;
- 2° — du groupement des contacts dans les formes ;
- 3° — du groupement des éléments dans les plans.

Attirons l'attention sur le fait que ces critères ne constituent pas des critères *complets*, sauf dans les conditions particulières qui seront précisées. Leur emploi n'en restera cependant pas moins utile en dehors de ces conditions car il permettra de limiter les recherches par transformation effective des formes aux seuls cas douteux.

Critère de la répartition des éléments.

Le critère de la répartition des éléments est basé sur cette constatation évidente, que *le nombre des éléments d'un plan reste invariable quand on déplace ce plan dans la forme à laquelle il appartient ou quand on déplace d'autres plans dans cette forme.*

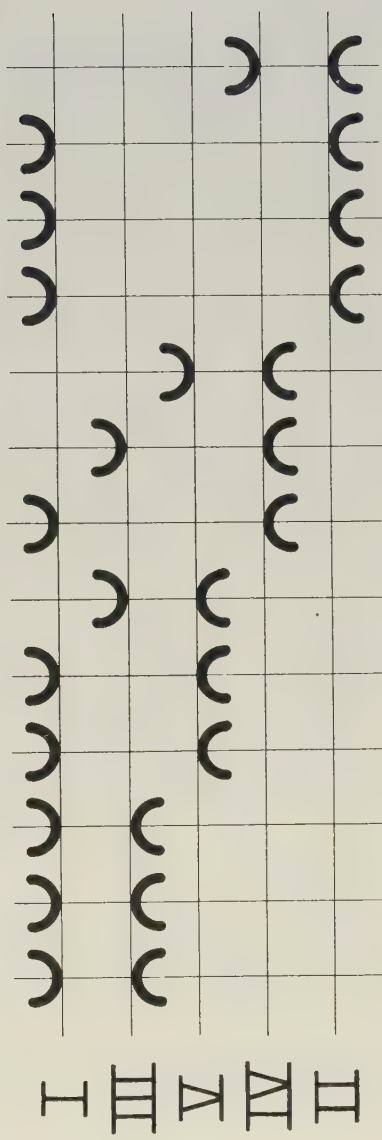
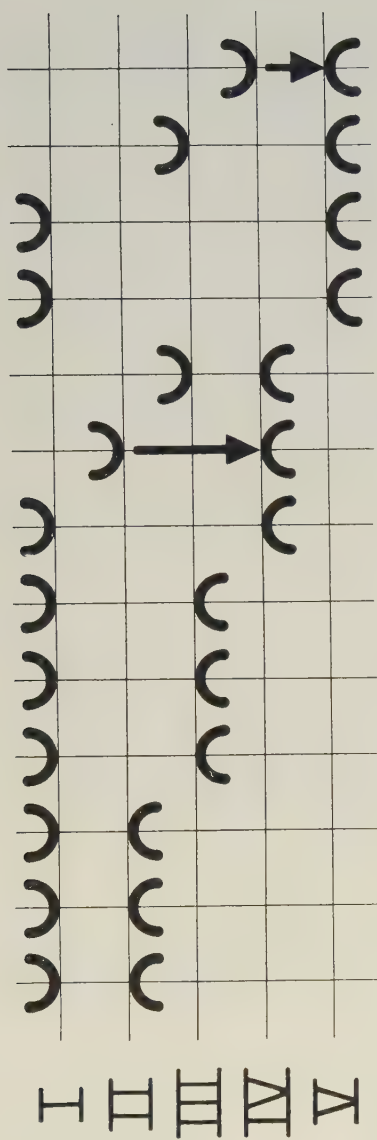


Fig. 10

Pour que des formes distinctes puissent être ramenées les unes aux autres il est donc nécessaire que la répartition des éléments entre les plans, *abstraction faite de l'ordre de succession de ces plans*, soit identique.

On vérifie facilement que la condition n'est généralement pas suffisante. A des répartitions identiques ne correspondent pas nécessairement des formes équivalentes, *sauf dans le cas particulier des abaqes à trois plans* * (Voir plus loin : *Etude des formes à trois plans*).

On peut dès lors énoncer le critère de la répartition des éléments sous la forme suivante :

Etant donné deux formes tangentielles complètes à n plans indépendants :

1° — *Si la répartition des éléments entre les plans est différente, les deux formes ne sont pas équivalentes ;*

2° — *Si la répartition des éléments est identique avec $n = 3$, les deux formes sont équivalentes ;*

3° — *Si la répartition des éléments est identique avec $n > 3$, on ne peut rien affirmer.*

En pratique le critère est d'application immédiate. On associe à chaque plan un nombre égal à celui des éléments qu'il comporte. Ces nombres doivent se retrouver, *abstraction faite de leur ordre de succession*, dans toutes les formes pour lesquelles la répartition des éléments est identique.

On conviendra de représenter cette répartition par la suite des nombres d'éléments, placés entre tirets, et écrits dans leur ordre de succession décroissante sans tenir compte de la position relative des plans correspondants.

Critère du groupement des contacts.

Le critère du groupement des contacts est basé sur la propriété

* Nous excluons évidemment le cas des abaqes tangentiels complets à deux plans, pour lesquels il n'existe qu'une seule forme. Le problème de l'équivalence ne se pose pas à leur sujet.

d'invariance de l'ordre de conjugaison des plans entre-eux, pour toute transformation que peut subir la forme à laquelle ils appartiennent.

Appelons CONTACTS GROUPES les contacts qui réalisent la conjugaison de deux plans déterminés. A chaque couple de plans conjugués est ainsi associé un groupe de contacts et la propriété d'invariance des ordres de conjugaison entraîne la permanence de ces groupes.

Soient dès lors deux formes équivalentes. Nous pourrions affirmer que les groupes de trois contacts, les groupes de deux contacts et les contacts isolés sont en nombres respectivement égaux dans les deux formes. Ce que nous exprimerons d'une manière abrégée en disant que pour des formes équivalentes le *groupement* des contacts est identique.

La réciproque n'est pas vraie : à des groupements identiques des contacts ne correspondent pas nécessairement des formes équivalentes, *sauf dans le cas des abaques à trois plans* (Voir plus loin : *Etude des formes à trois plans*).

Le critère du groupement des contacts pourra dès lors s'énoncer comme suit :

Etant donné deux formes tangentielles complètes à n plans indépendants :

1° — *Si le groupement des contacts dans les deux formes est différent, ces formes ne sont pas équivalentes ;*

2° — *Si le groupement des contacts est identique avec $n = 3$, les deux formes sont équivalentes ;*

3° — *Si le groupement des contacts est identique avec $n > 3$, on ne peut rien affirmer.*

Nous conviendrons de représenter les groupements de contacts par les nombres de groupes de chaque type, placés entre tirets, et écrits dans l'ordre suivant :

- Nombre de groupes de 3 contacts,
- Nombre de groupes de 2 contacts,
- Nombre de contacts isolés.

Un groupement défini par le symbole

$$A \text{ — } B \text{ — } C$$

comportera A groupes de trois contacts, B groupes de deux contacts et C contacts isolés.

Deux groupements définis respectivement par les symboles

$$A \text{ — } B \text{ — } C$$

$$A' \text{ — } B' \text{ — } C'$$

seront identiques si l'on a simultanément

$$A = A' \quad B = B' \quad C = C'$$

Critère du groupement des éléments.

Le critère du groupement des éléments repose sur le même principe que le précédent, mais il se réfère au groupement des éléments dans chaque plan au lieu de se borner à l'examen du groupement des contacts dans les formes.

Considérant comme ELEMENTS GROUPES des éléments qui appartiennent à des contacts groupés on caractérisera, d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les contacts dans les formes, le *groupement* des éléments dans un plan par le nombre de groupes de trois éléments, le nombre de groupes de deux éléments et le nombre d'éléments isolés.

Pour des formes équivalentes le groupement des éléments dans les différents plans doit se retrouver, abstraction faite de l'ordre de succession des plans, identique à lui-même. Mais à des groupements identiques des éléments ne correspondent pas nécessairement des formes équivalentes, *sauf dans le cas des abagues à trois plans et des abagues à quatre plans* (Voir plus loin : *Etude des formes à trois plans* et *Etude des formes à quatre plans*).

Le critère du groupement des éléments peut dès lors s'énoncer de la manière suivante :

Etant donné deux formes tangentielles complètes à n plans indépendants :

1° — *Si le groupement des éléments dans les plans est différent pour les deux formes, ces formes ne sont pas équivalentes ;*

2° — Si le groupement des éléments dans les plans est identique pour les deux formes, avec $n = 3$ ou $n = 4$, les deux formes sont équivalentes * ;

3° — Si le groupement des éléments est identique avec $n > 4$, on ne peut rien affirmer.

Le groupement des éléments dans un plan se représentera, comme un groupement de contacts, par les nombres de groupes de chaque type, placés entre tirets, et écrits dans l'ordre suivant :

- Nombre de groupes de 3 éléments,
- Nombre de groupes de 2 éléments,
- Nombre d'éléments isolés.

Un groupement défini par le symbole

$$a \text{ — } b \text{ — } c$$

comportera a groupes de trois éléments, b groupes de deux éléments et c éléments isolés.

Deux groupements définis respectivement par les symboles

$$a \text{ — } b \text{ — } c$$

$$a' \text{ — } b' \text{ — } c'$$

seront identiques si l'on a simultanément

$$a = a' \qquad b = b' \qquad c = c'$$

Propriétés relatives à l'emploi des différents critères.

En pratique on appliquera successivement — pour autant que l'on n'arrive pas à une conclusion — les trois critères.

Le contrôle de la répartition des éléments et du groupement des contacts sont les deux opérations les plus rapides. On les effectue en premier lieu et c'est seulement si le cas reste douteux que l'on passe à l'examen du groupement des éléments.

* Le critère du groupement des éléments est donc un critère complet pour les formes à trois et à quatre plans, alors que les deux critères précédents ne sont complets que pour les formes à trois plans.

Nous donnons ci-après quelques propriétés relatives à l'application successive des différents critères.

PROPRIETE I. — *L'identité de répartition des éléments dans deux formes n'entraîne pas nécessairement — sauf dans le cas des formes à trois plans — l'identité de groupement des contacts, et inversement.*

Nous ne reviendrons pas sur le cas des formes à trois plans pour lesquelles on se référera, comme indiqué plus haut, au paragraphe relatif à l'étude de ces formes.

Soit dès lors une forme dont le nombre de plans, supérieur à trois, peut être quelconque et dans laquelle on peut isoler la configuration 1 de la figure 11. En modifiant cette configuration comme l'indique le schéma 2 de la même figure, on obtient une nouvelle forme pour laquelle la répartition des éléments n'aura pas été modifiée, alors que le groupement des contacts sera changé.

Inversement, soit une forme dans laquelle on peut isoler la configuration 1 de la figure 12. En modifiant cette configuration comme l'indique le schéma 2 — ou le schéma 3 dans le cas où le nombre des éléments du plan supérieur dépasserait, avant transformation, de trois unités le nombre des éléments du plan suivant — on obtient une nouvelle forme pour laquelle le groupement des contacts n'est pas modifié tandis que la répartition des éléments est altérée.

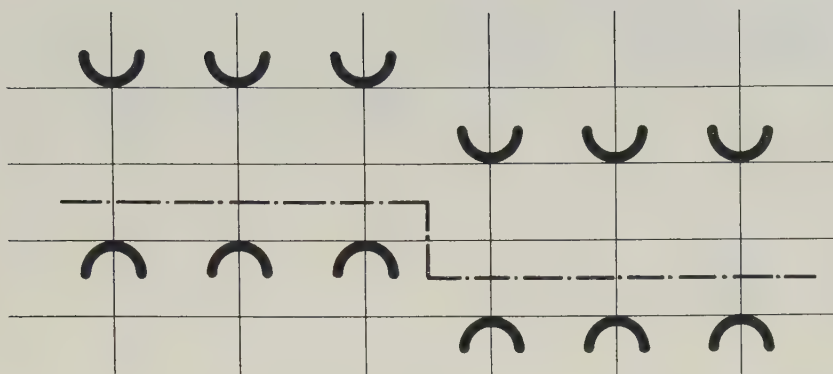
L'identité de répartition des éléments est donc bien compatible avec des groupements différents des contacts, et inversement.

COROLLAIRE. — *Le critère de la répartition des éléments et le critère du groupement des contacts sont indépendants l'un de l'autre.*

PROPRIETE II. — *L'identité simultanée de la répartition des éléments et du groupement des contacts dans des formes données n'entraîne pas nécessairement — sauf dans le cas des formes à trois et à quatre plans — l'identité de groupement des éléments.*

Un même groupement des éléments, par contre, implique une répartition identique de ces éléments et un groupement identique des contacts.

1



2

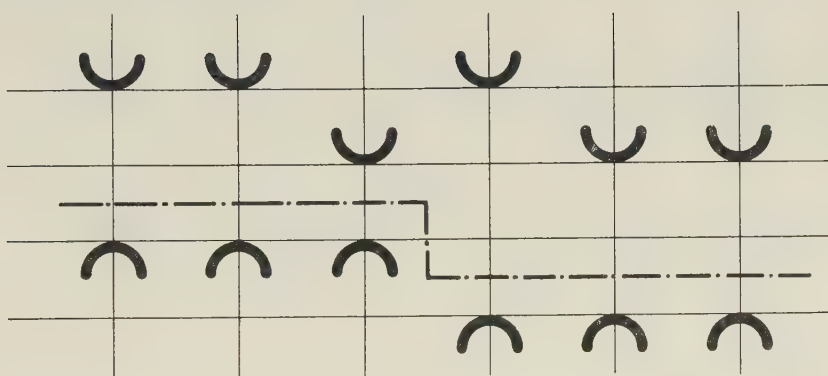
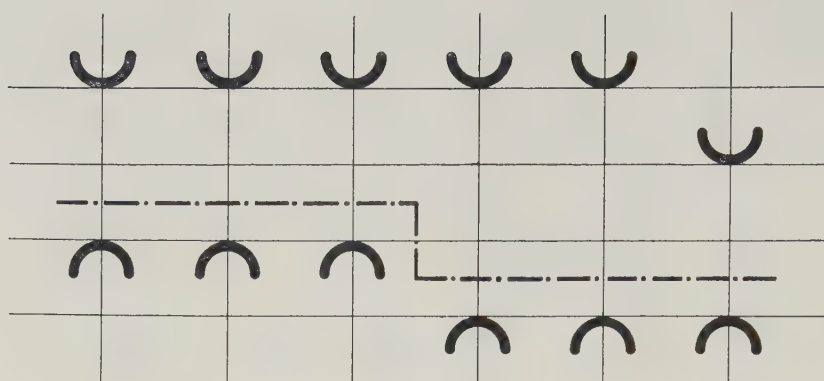
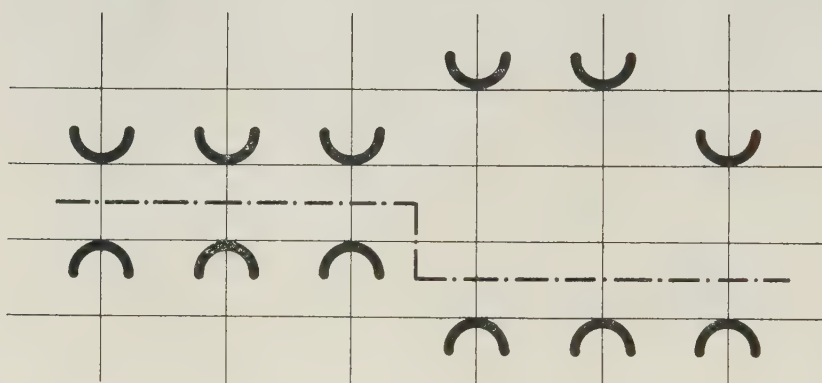


Fig. 11

1



2



3

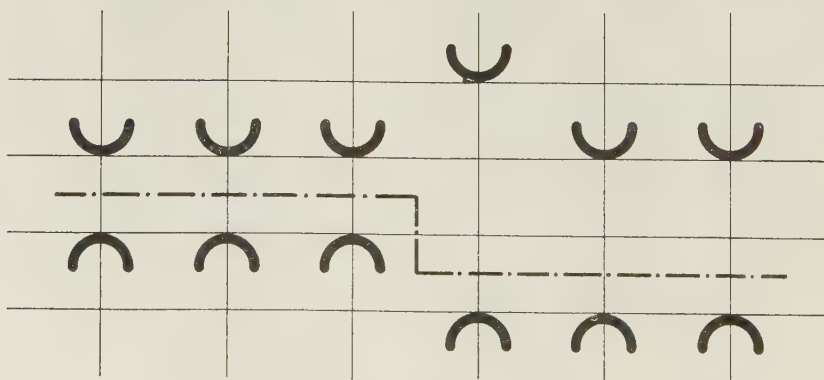


Fig. 12

Soit, en effet, une forme dont le nombre de plans est supérieur à quatre — pour le cas des formes à trois et quatre plans on se reportera aux paragraphes relatifs à l'étude de ces formes — et dans laquelle on peut isoler, par exemple, la configuration 1 de la figure 13. En modifiant cette configuration comme l'indique le schéma 2 de la même figure, on obtiendra une nouvelle forme pour laquelle la répartition des éléments et le groupement des contacts n'auront pas été modifiés, tandis que le groupement des éléments sera changé *.

On vérifie immédiatement, par contre, qu'un même groupement des éléments est incompatible avec des répartitions différentes des éléments ou avec des groupements différents des contacts.

Le groupement des éléments, en effet, définit sans ambiguïté le nombre des éléments de chaque plan. A un même groupement correspond un même nombre d'éléments par plan.

D'autre part, à des éléments groupés correspondent toujours des contacts groupés. Ce qui entraîne, pour des groupements identiques des éléments, des groupements identiques des contacts **.

COROLLAIRE I. — *Le critère du groupement des éléments est indépendant des critères de la répartition des éléments et du groupement des contacts.*

La réciproque n'est pas vraie.

COROLLAIRE II. — *La combinaison des critères de la répartition des éléments et du groupement des contacts constitue un critère complet pour les formes à quatre plans.*

Il résulte de ce qui précède que les critères, appliqués dans l'ordre où ils ont été énoncés, permettent toujours de conclure :

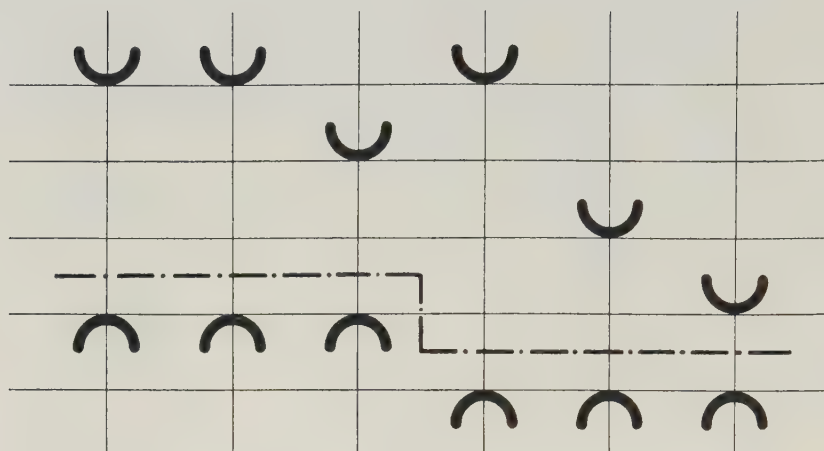
* Sauf dans le cas particulier où le groupement des éléments dans les plans correspondant aux dernières lignes du schéma serait, avant transformation, du type

$$\begin{array}{c} a \text{ — } b \text{ — } c \\ a \text{ — } (b \text{ — } 1) \text{ — } (c + 2) \end{array}$$

a, b, c étant des nombres quelconques.

** La réciproque n'est pas vraie car, si à des contacts groupés correspondent bien également des éléments groupés, un groupement déterminé de contacts n'implique rien quant à la répartition des groupes d'éléments dans les différents plans.

1



2

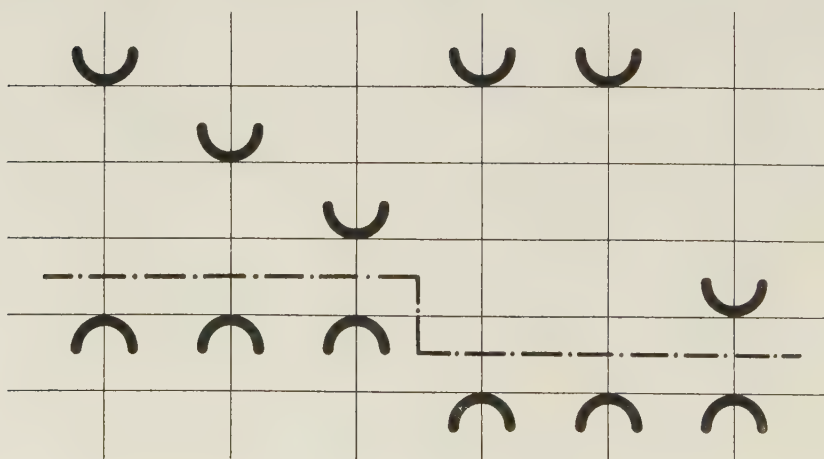


Fig. 13

— dès l'application du premier critère dans le cas des formes à trois plans ;

— dès l'application du second critère dans le cas des formes à quatre plans.

Dans le cas des formes à plus de quatre plans on ne peut pas toujours conclure.

Remarquons d'autre part que si l'on applique d'abord le critère du groupement des éléments il est inutile, au cas où ce critère ne permettrait pas de conclure, d'utiliser ensuite les deux autres.

REMARQUE. — Ainsi que nous venons de le voir, l'identité du groupement des éléments, qui implique l'identité de la répartition des éléments et du groupement des contacts, n'entraîne pas nécessairement l'équivalence des formes. Les cas de non-équivalence sont cependant beaucoup moins nombreux que les cas d'équivalence. Aussi la probabilité d'équivalence est-elle élevée quand les trois critères donnent successivement l'identité.

Nous donnerons un exemple de non-équivalence, à partir duquel il sera facile d'en construire d'autres.

Soient les deux formes de la figure 14, qui ne diffèrent que par la disposition des éléments A, B et A', B'. On a pour ces formes la répartition des éléments

$$7 - 6 - 5 - 4 - 4,$$

le groupement des contacts

$$1 - 3 - 4,$$

et le groupement des éléments

$$1 - 1 - 2$$

$$0 - 1 - 2$$

$$1 - 1 - 1$$

$$0 - 1 - 2.$$

$$0 - 2 - 1$$

Elles ne peuvent cependant pas être ramenées l'une à l'autre par des mouvements de plans.

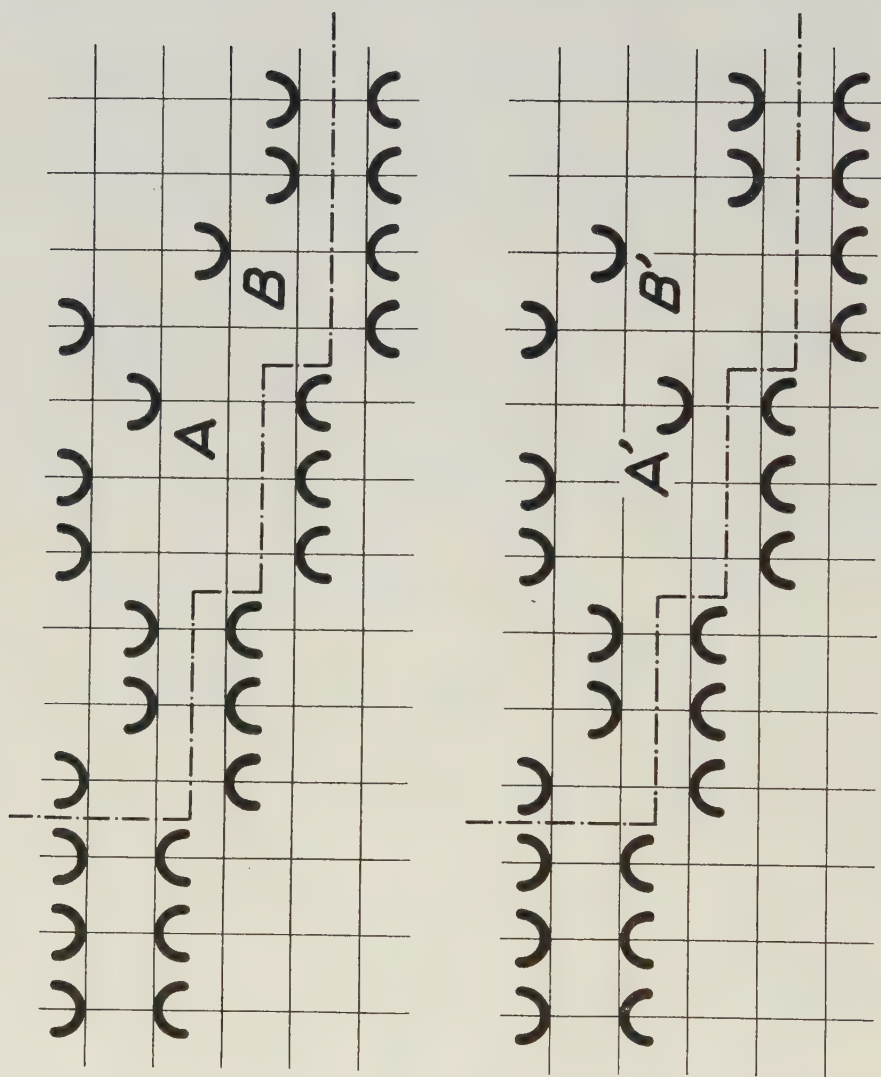


Fig. 14

Formes fondamentales

La notion de formes équivalentes étant acquise on aperçoit l'intérêt qu'il peut y avoir à représenter, dans la mesure du possible, les mêmes abaques ou des abaques de structures semblables par des schémas identiques.

La définition des formes fondamentales nous permettra d'arriver à ce résultat. Elle nous donnera une règle au moyen de laquelle nous pourrons effectuer un choix, suivant un critère unique, parmi les différentes formes d'un même abaque et mettre en évidence l'une d'entre elles par rapport à toutes les autres.

Etant donné deux formes différentes d'un abaque, désignons par ELEMENTS ABERRANTS les éléments placés différemment dans les deux schémas. Notre détermination de la forme fondamentale relative à un abaque reposera sur la comparaison des éléments aberrants dans ses formes ordonnées.

*Considérant les différentes formes ordonnées d'un abaque, nous appellerons FORME FONDAMENTALE la forme F telle que, quelle que soit la forme ordonnée F' à laquelle on la compare, le premier élément aberrant A PARTIR DE LA GAUCHE soit toujours situé PLUS HAUT dans F que dans F' **.

Comme on le voit, le principe sur lequel repose la définition des formes fondamentales s'inspire de celui — dont il est en quelque sorte le prolongement — sur lequel a été basée la définition des formes ordonnées. L'idée est la même : rejet au maximum des éléments vers le haut et vers la gauche des schémas.

La figure 15 montre l'application du critère de détermination des formes fondamentales et donne un exemple d'une telle forme. L'abaque considéré peut se présenter sous les formes ordonnées A et B. La forme A est fondamentale, car le premier élément aberrant à partir de la gauche (élément primaire du contact 5 indiqué par la flèche) est situé plus haut dans A que dans B.

* Pour toutes les formes ordonnées que peut présenter un même abaque, le dessin des éléments secondaires est identique. La détermination d'une forme fondamentale reposera donc toujours sur le seul examen de la disposition des éléments primaires.

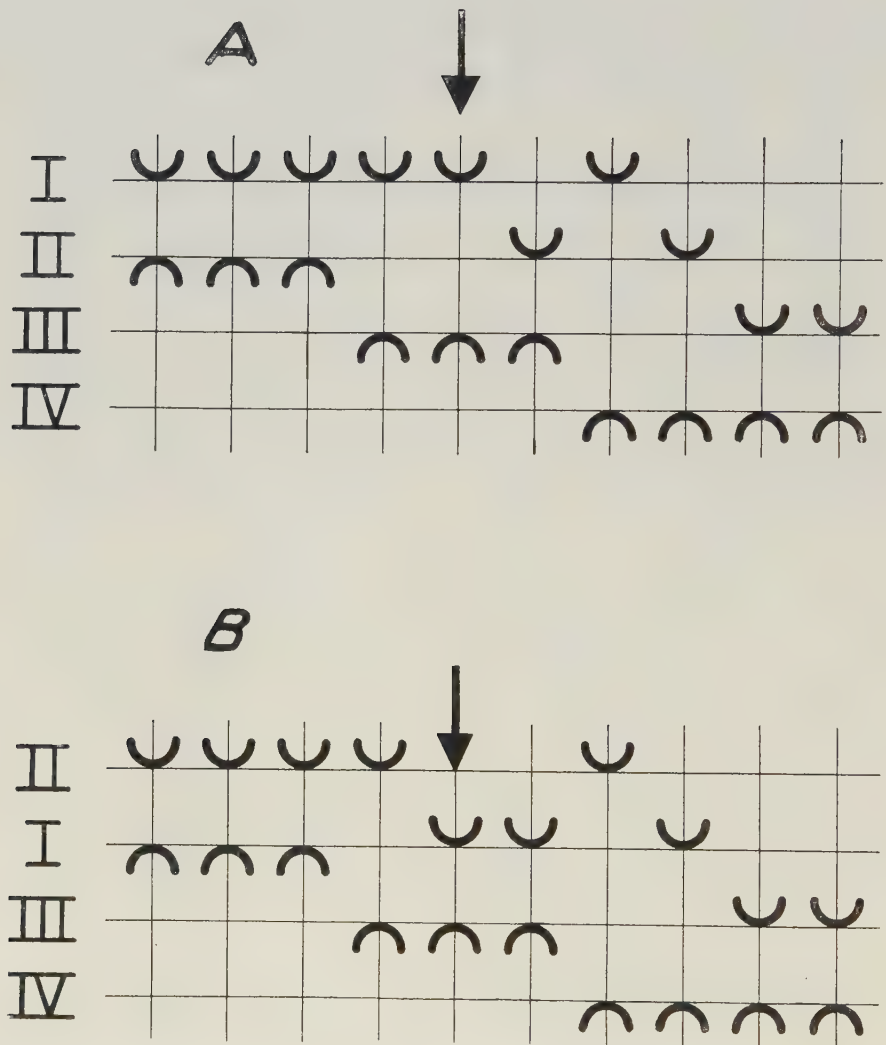


Fig. 15

Les formes qui ne sont pas fondamentales seront appelées FORMES SUBSIDIAIRES.

Toute forme subsidiaire peut évidemment être ramenée à la forme fondamentale à laquelle elle est équivalente, par des mouvements de plans convenablement choisis.

Nous conseillerons de représenter les abaques, pour autant que des circonstances déterminantes ne s'y opposent pas, par leur forme fondamentale de préférence à toute autre.

Formes simples et formes multiples - Ordre de multiplicité

On peut se demander s'il existe des cas où certaines modifications apportées à l'ordre de succession des plans d'une forme donnée sont susceptibles de conduire à une ou plusieurs formes identiques à la forme de départ quant à la *disposition* des éléments, abstraction étant faite de leur individualité. La réponse est affirmative.

Considérons dès lors, pour un abaque donné, les formes qui correspondent aux différents ordres possibles de succession des plans et portons notre attention sur la disposition des éléments. Ces formes pourront se classer en deux catégories :

1° — Les formes que l'on ne rencontre *qu'une seule fois* dans la série envisagée;

2° — Les formes qui se répètent dans cette série et que l'on rencontre par conséquent *plusieurs fois*.

Nous appellerons FORMES SIMPLES les formes de la première catégorie, FORMES MULTIPLES les formes de la seconde.

Une forme simple est donc une forme à partir de laquelle il n'est pas possible, par une modification de l'ordre de succession des plans, de retrouver une forme analogue.

Une forme multiple est une forme pour laquelle il existe une ou plusieurs modifications de l'ordre de succession des plans qui conduisent à une ou plusieurs formes identiques quant à la disposition des éléments, et qui ne diffèrent de la première que par l'individualité de certains éléments.

Ces formes seront appelées VARIANTES de la première.

La figure 16 donne un exemple de forme multiple. Du point de vue morphologique, en effet, les deux schémas représentés par la figure ne diffèrent pas entre eux et l'on passe du premier au second en changeant l'ordre de succession des plans III et IV. Seule l'individualité de certains éléments est modifiée. On dira que la seconde forme est une variante de la première et inversement.

Ordre de multiplicité.

Nous définirons, pour les formes multiples, un ORDRE DE MULTIPLICITE par l'intermédiaire duquel nous caractériserons le nombre des variantes qu'elles peuvent présenter. Cet ordre sera donné, pour chaque forme, par le nombre des dispositions différentes des plans pour lesquelles on peut la trouver. L'ordre de multiplicité est donc égal au nombre de variantes augmenté d'une unité.

Les formes seront dites *doubles, triples, etc...*, suivant que leur ordre de multiplicité sera respectivement *deux, trois, etc.*

La forme de la figure 16 est une forme double, car nous la trouvons pour les deux dispositions de plans indiquées et seulement pour ces dispositions.

Multiplicité réelle et apparente.

Nous dirons enfin que la multiplicité est REELLE ou APPARENTE suivant que, *compte tenu cette fois de l'individualité des éléments*, les variables qui peuvent être déterminées sont différentes — tout au moins certaines d'entre elles — pour les différentes formes ou bien sont chaque fois les mêmes.

La différence est fondamentale.

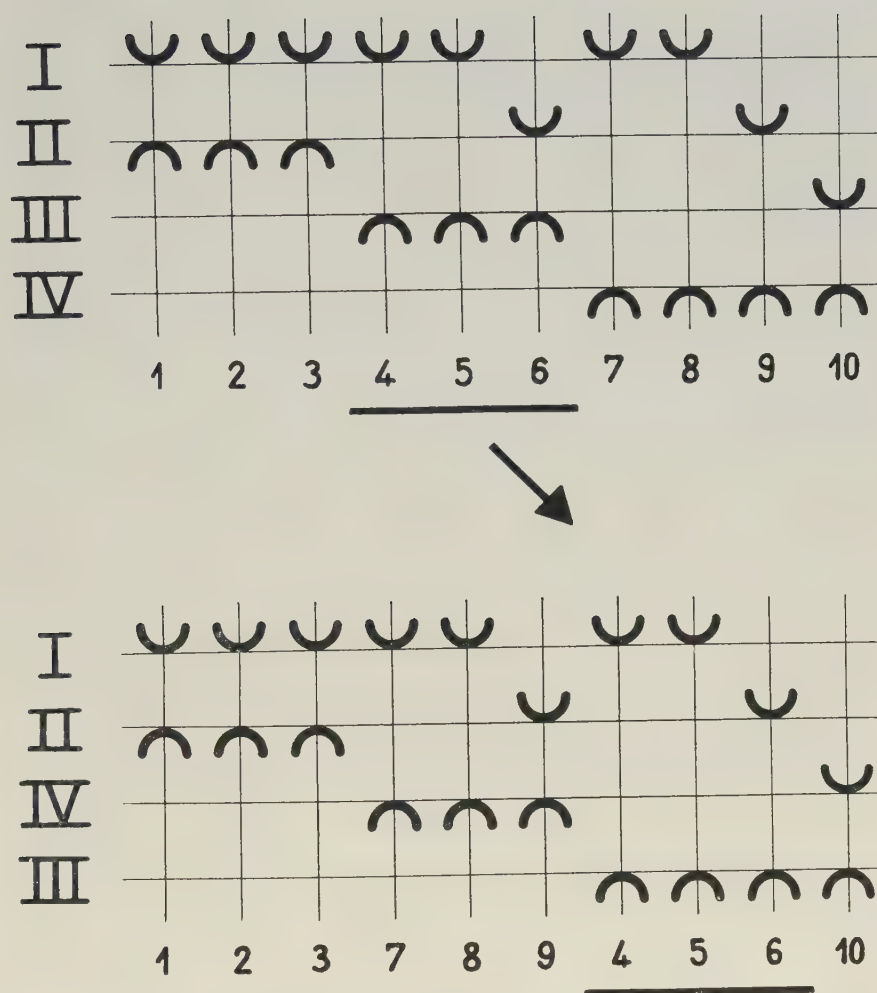


Fig. 16

Dans le premier cas il s'agit de formes qui ont effectivement des possibilités distinctes et qui seront toutes utilisées, suivant le choix de l'inconnue.

Dans le second cas, au contraire, les différences ne portent que sur le mode d'emploi (ordre de succession des plans), sans impliquer pour les variantes des possibilités autres que celles de la forme de départ.

Dans le premier cas les variantes présentent un intérêt réel et doivent être considérées comme autant d'entités distinctes, tandis que dans le second on se bornera à retenir la forme la plus intéressante au point de vue utilisation, les autres pouvant être négligées comme faisant double emploi.

Il est bien évident que les deux types de multiplicité peuvent coexister pour une même forme, certaines variantes pouvant se présenter avec le caractère de multiplicité réelle, d'autres avec celui de multiplicité apparente. On y fera correspondre les notions d'*ordre de multiplicité réelle* et d'*ordre de multiplicité apparente*, la somme de ces deux ordres de multiplicité partielle étant égale à l'ordre de multiplicité tel qu'il a été défini plus haut.

La forme qui a été donnée comme exemple à la figure 16 présente le caractère de multiplicité réelle. En effet, les variables qui peuvent être prises comme inconnues correspondent, pour le premier schéma aux contacts numérotés 7, 8, 9 et 10, pour le second aux contacts numérotés 4, 5, 6 et 10.

Sauf en ce qui concerne les variables correspondant au contact 10, pour lesquelles les deux schémas conviennent, c'est à l'une ou l'autre disposition des plans qu'il faudra recourir, suivant l'inconnue choisie.

Quand nous parlerons de formes multiples, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit de multiplicité réelle.

Propriétés relatives à la résolution

Les possibilités qu'offre un abaque donné quant aux variables susceptibles d'y être choisies comme inconnues dépendent essentiellement des contacts qui peuvent être pris comme contacts de résolution. En effet,

seules les variables qui correspondent aux éléments impliqués dans ces contacts peuvent être prises comme inconnues.

Nous donnerons ci-après quelques théorèmes relatifs à la détermination de ces variables.

THEOREME I. — *Toute variable susceptible d'être prise pour inconnue appartient à un plan qui peut être amené en dernière position ou forme contact avec un élément appartenant à un tel plan, et réciproquement.*

L'élément secondaire du contact de résolution appartient toujours au dernier plan. Pour qu'un contact donné puisse être pris comme contact de résolution, il faut donc que l'un au moins des deux plans auxquels appartiennent ses éléments puisse être amené en dernière position. Ce qui démontre la première partie du théorème.

La réciproque résulte immédiatement de ce que tout élément appartenant au dernier plan peut toujours être pris comme élément de résolution.

COROLLAIRE. — *Les variables impliquées dans les contacts de conjugaison de deux plans dont aucun ne peut être amené en dernière position ne peuvent pas être prises comme inconnues.*

THEOREME II. — *Toute variable susceptible d'être prise comme inconnue appartient à un plan qui ne comporte que quatre éléments ou forme contact avec un élément appartenant à un tel plan.*

La réciproque n'est pas vraie.

La propriété directe résulte de ce que le dernier plan, qui est toujours impliqué dans le contact de résolution, comporte nécessairement quatre éléments.

La réciproque n'est pas vraie car la propriété, pour un plan, de comporter quatre éléments n'entraîne pas qu'il puisse être amené en dernière position.

COROLLAIRE I. — *Les variables impliquées dans les contacts de conjugaison de deux plans qui comportent chacun plus de quatre éléments ne peuvent pas être prises comme inconnues.*

COROLLAIRE II. — *Le nombre des variables susceptibles d'être prises comme inconnues ne peut être inférieur à huit.*

COROLLAIRE III. — *Le nombre des variables susceptibles d'être prises comme inconnues ne peut dépasser huit fois le nombre des plans à quatre éléments.*

THEOREME III. — *Les variables impliquées dans les contacts de conjugaison de plans à quatre éléments reliés par une chaîne de conjugués successifs à quatre éléments au dernier plan de l'abaque peuvent toujours être prises comme inconnues.*

La propriété résulte du fait que les plans considérés peuvent toujours être amenés en dernière position (cfr. Théorème V du paragraphe *Mouvement des plans. Formes équivalentes*).

COROLLAIRE. — *Si à partir d'un plan de rang p d'un abaque à n plans les $(n - p)$ plans restants sont des plans à quatre éléments, les variables impliquées dans les contacts de conjugaison de ces plans peuvent toutes être prises comme inconnues.*

REMARQUE. — On se reportera à la théorie du mouvement des plans pour la détermination systématique de l'ordre de succession des plans qui permet de prendre comme contact de résolution un contact donné.

Etude des formes à trois plans

On construit facilement les formes tangentielles complètes à trois plans indépendants. On constate qu'elles sont au nombre de trois, à savoir :

- les deux formes fondamentales données par la figure 17 ;
- une forme subsidiaire équivalente à la forme I et correspondant, par exemple, à l'ordre II — I — III de succession des plans.

Formes fondamentales

$n = 3$

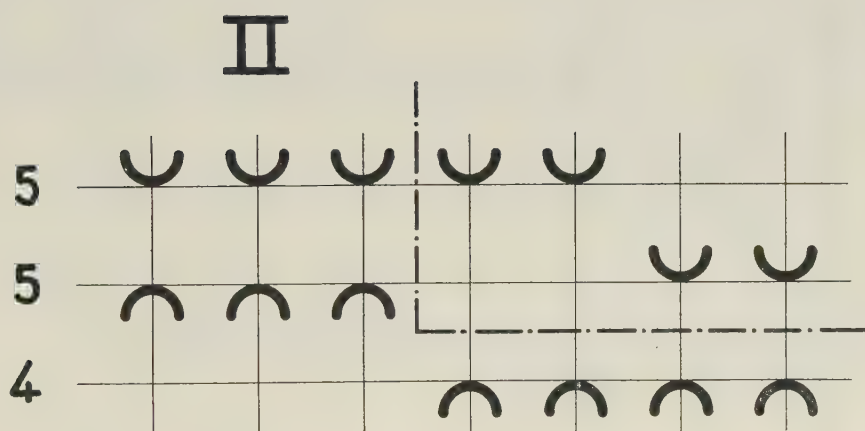
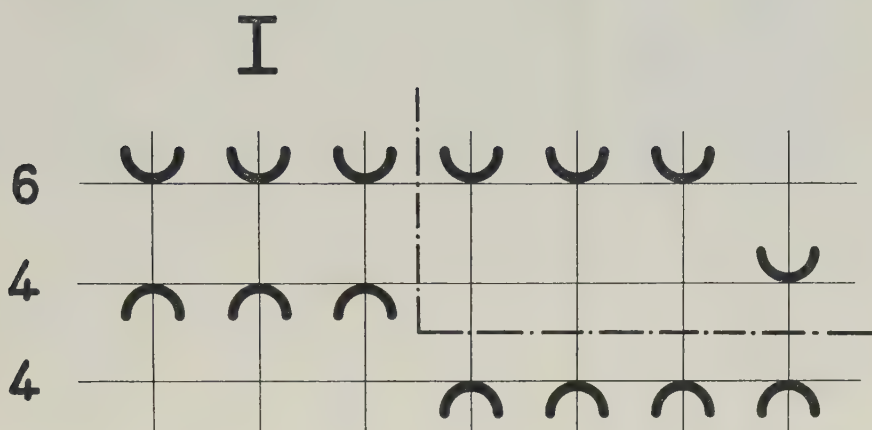


Fig. 17

Forme	Répartition des éléments	Groupe ment des contacts	Groupe ment des éléments
I	6 — 4 — 4	2 — 0 — 1	2 — 0 — 0 1 — 0 — 1 1 — 0 — 1
II	5 — 5 — 4	1 — 2 — 0	1 — 1 — 0 1 — 1 — 0 0 — 2 — 0

Tableau II

Il y a donc deux types d'abaques tangentiels complets à trois plans indépendants.

Les abaques du type I permettent de prendre toutes les variables comme inconnues. Les plans seront positionnés, par exemple, dans l'ordre I — II — III si l'inconnue appartient à l'un des quatre contacts de droite, et dans l'ordre I — III — II si elle intéresse l'un des trois contacts de gauche.

Dans les abaques du type II, seules les huit variables qui appartiennent aux quatre contacts de droite peuvent être déterminées, les plans étant positionnés, par exemple, dans l'ordre indiqué par la figure.

La répartition des éléments, le groupement des contacts et le groupement des éléments sont différents pour les deux formes fondamentales (cfr. Tableau II). L'identité d'un quelconque de ces trois facteurs, pour des formes à trois plans, détermine donc l'équivalence de ces formes et entraîne automatiquement l'identité des deux autres facteurs.

Ainsi se trouvent justifiées les propriétés données au paragraphe *Critères d'équivalence des formes*, au sujet de l'application des critères d'équivalence aux formes à trois plans.

Etude des formes à quatre plans

Nous avons établi, par une détermination systématique des dispositions possibles pour les éléments situés à droite de la diagonale qui délimite la zone des éléments imposés, toutes les formes tangentielles complètes à quatre plans indépendants. Nous avons trouvé qu'elles sont au nombre de *trente*.

La comparaison de ces formes entre elles nous a montré ensuite qu'elles se ramènent, en tenant compte des équivalences, à *onze* formes fondamentales distinctes.

Il existe donc onze types d'abaques tangentiels complets à quatre plans indépendants.

Nous donnons, dans les figures 18 à 21, la série complète des formes fondamentales à quatre plans indépendants.

On constatera que seule la forme I définit un abaque à *résolution totale*. Tous les plans, sauf le premier, y sont des plans à quatre éléments. Toutes les variables peuvent être prises comme inconnues.

Les autres formes définissent des abaques à *résolution partielle*. Elles comportent toutes, en effet, au moins deux plans conjugués ayant chacun plus de quatre éléments.

La forme I comporte une forme subsidiaire utile*. Cette forme subsidiaire est une forme double. Elle correspond aux ordres

$$I - III - IV - II$$

et

$$I - II - IV - III$$

de succession des plans.

La forme II comporte une forme subsidiaire utile correspondant à l'ordre

$$II - I - IV - III$$

de succession des plans.

Les formes III, IV, VII et IX sont des formes doubles.

Remarquons que toutes les formes, sauf la forme VI, sont à résolution totale *par rapport à leurs plans à quatre éléments* **. Seule la forme VI possède un plan à quatre éléments qui ne peut pas être amené en dernière position.

Le tableau III (hors-texte) montre que deux formes fondamentales distinctes diffèrent toujours, soit par la répartition des éléments, soit par le groupement des contacts, soit par ces deux facteurs à la fois. Il permet de vérifier de plus que, pour de telles formes, le groupement des éléments est toujours différent.

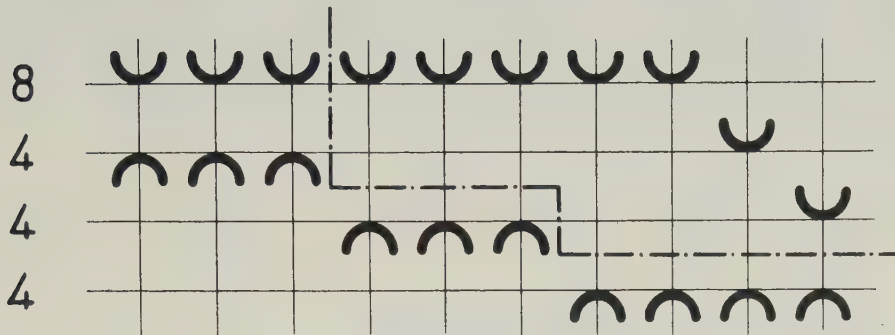
* Nous retiendrons comme formes subsidiaires UTILES des formes qui, sélectionnées au moyen du même critère de rejet des éléments vers le haut que celui qui permet d'isoler les formes fondamentales, ne font pas double emploi, entre elles ou avec la forme fondamentale à laquelle elles sont équivalentes, en ce qui concerne les inconnues qu'elles permettent de déterminer.

** Nous entendons par là que toutes les variables impliquées dans les contacts de résolution qui intéressent les plans à quatre éléments peuvent être prises pour inconnues.

Formes fondamentales

$n = 4$

I



II

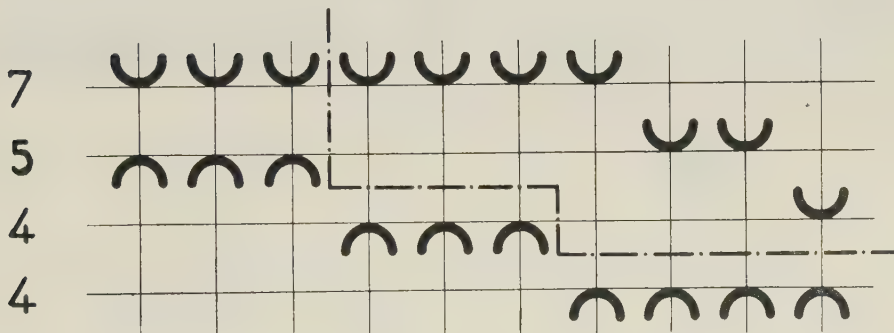


Fig. 18

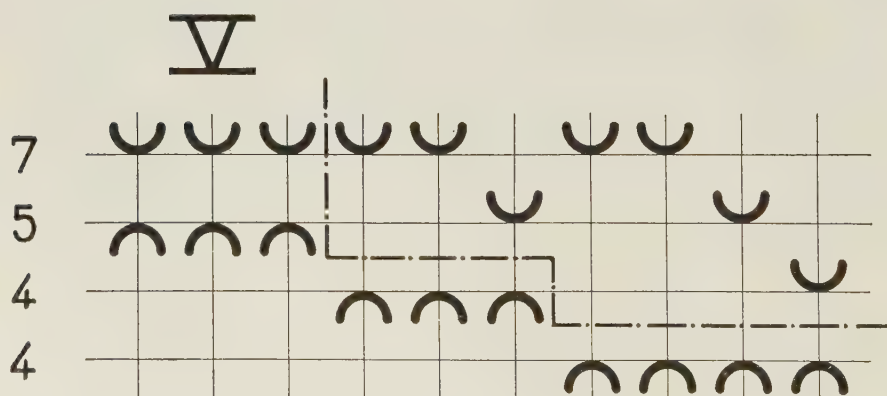
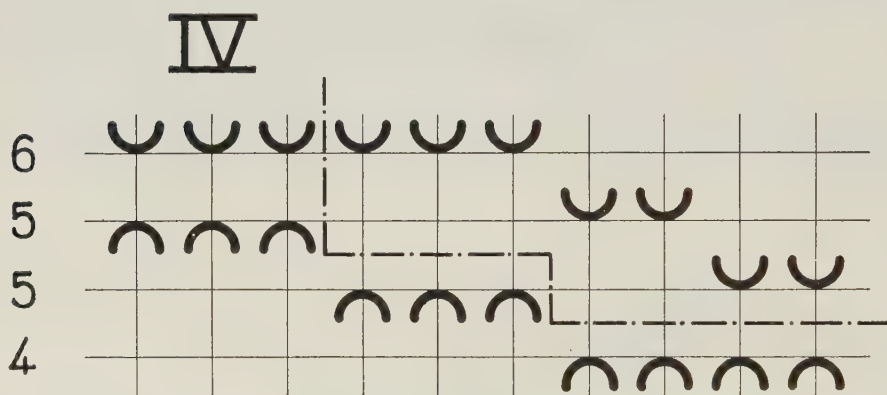
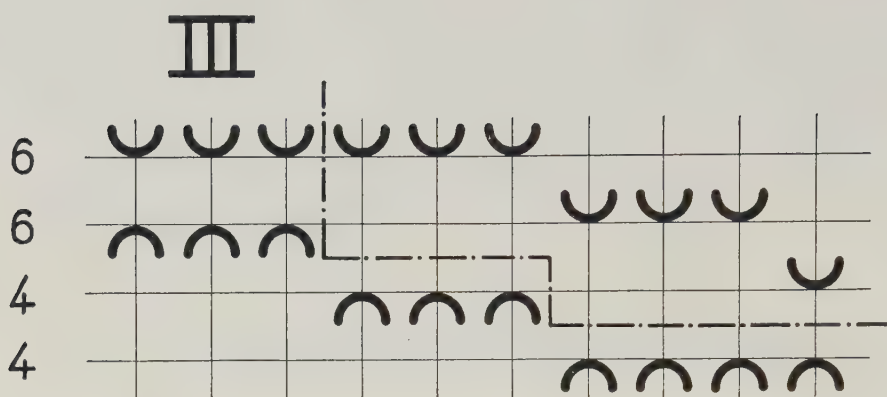
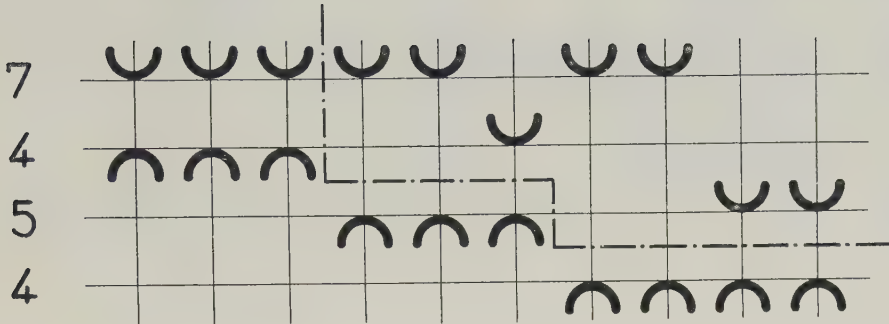
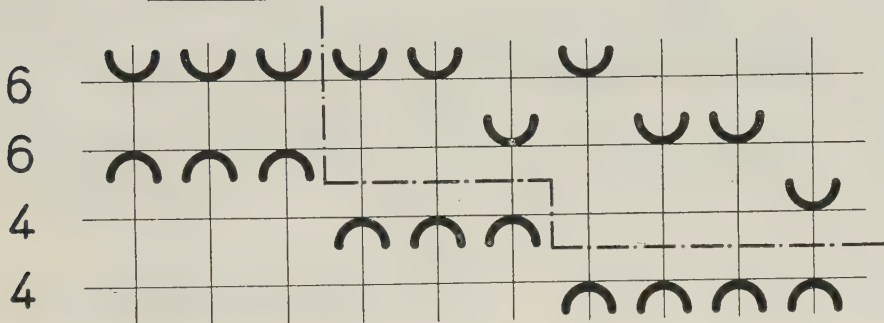


Fig. 19

VI



VII



VIII

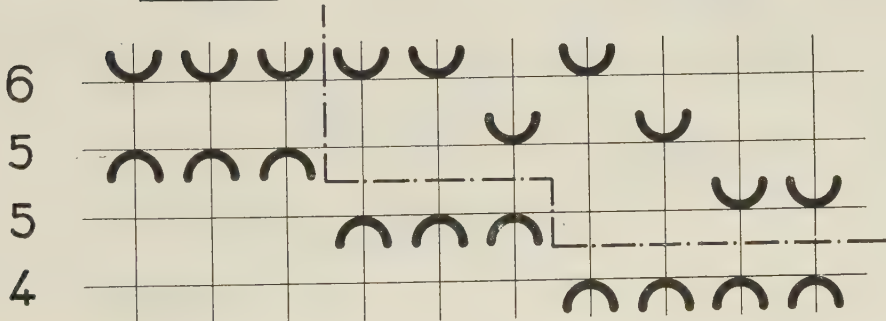


Fig. 20

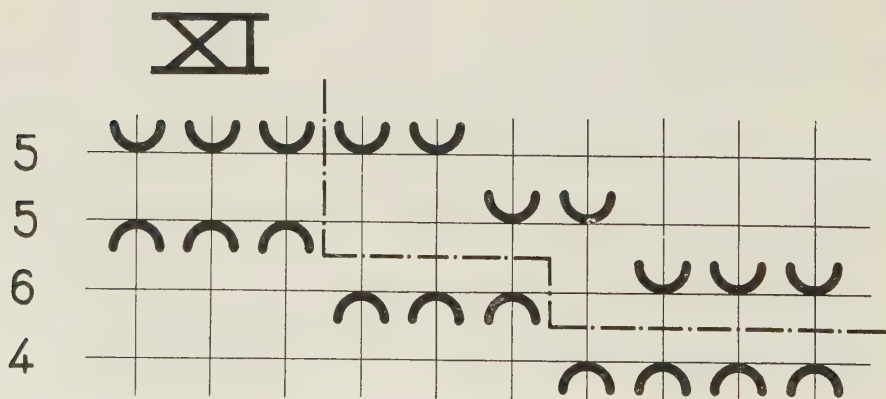
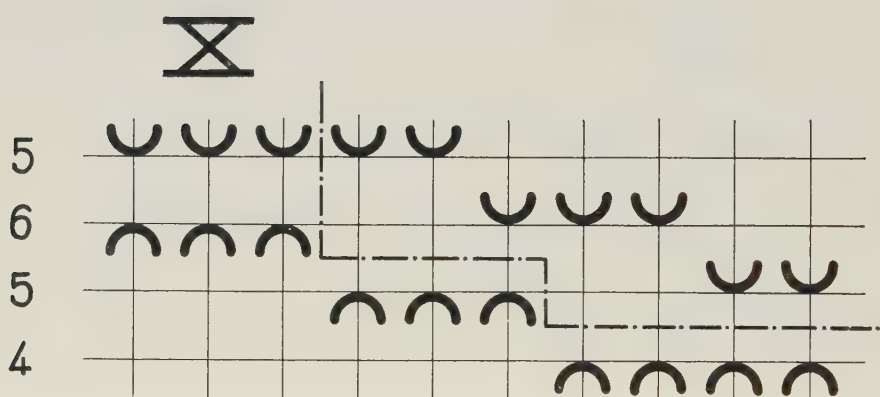
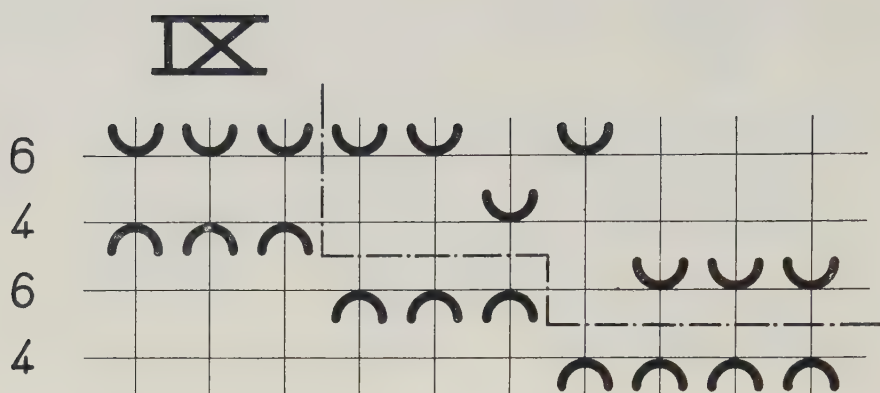


Fig. 21

Forme	Répartition des éléments	Groupe- ment des contacts	Groupe- ment des éléments
I	8—4—4—4	2—1—2	2—1—0 1—0—1 1—0—1 0—1—2
II	↑ 7—5—4—4	2—1—2	2—0—1 1—0—1 1—1—0 0—1—2
V	↓ 7—5—4—4	1—2—3	1—2—0 0—1—2 1—0—2 0—1—2
VI	↓	1—3—1	1—2—0 0—2—1 1—0—1 0—2—0
III	↑	3—0—1	2—0—0 1—0—1 2—0—0 1—0—1

VII	6-6-4-4 ↓	1-2-3	1-1-1 1-1-1 0-1-2 0-1-2
IX		2-1-2	1-1-1 1-0-1 1-1-1 1-0-1
IV	↑	2-2-0	2-0-0 1-1-0 1-1-0 0-2-0
VIII	6-5-5-4 ↓	1-2-3	1-1-1 1-0-2 0-2-1 0-1-2
X		1-3-1	1-1-0 1-1-1 0-2-1 0-2-0
XI		2-1-2	1-1-0 1-0-2 1-1-1 1-0-1

Tableau III

L'identité simultanée de la répartition des éléments et du groupement des contacts ou l'identité du groupement des éléments entraîne donc l'équivalence des formes à quatre plans. Ce qui justifie les propriétés énoncées au paragraphe *Critères d'équivalence des formes*, relativement à l'application des critères d'équivalence aux formes à quatre plans.

TROISIEME PARTIE

Etude des formes tangentielles complètes à plans groupés

Définition

Nous avons appelé ABAQUES A PLANS GROUPES les abaques qui comportent certains plans qui doivent être solidarisés entre eux préalablement à leur positionnement. Ces plans sont dits PLANS GROUPES. Ils sont indiqués dans les formes par des traits verticaux.

EXEMPLE. — L'abaque schématisé par la figure 22 est un abaque à plans groupés.

En effet, le plan III ne peut pas être positionné par rapport aux plans I et II qui précèdent, mais les plans III et IV peuvent être groupés et l'on peut alors mettre en place l'ensemble de ces deux plans par rapport à I et II.

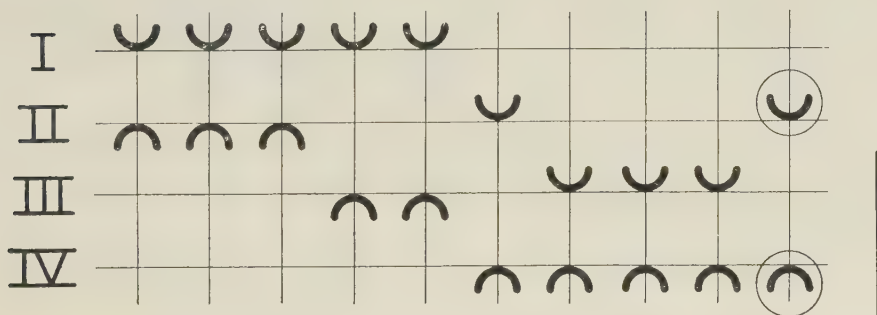


Fig. 22

Structure des formes à plans groupés

L'étude de la structure des formes à plans groupés est étroitement liée à celle des formes à plans indépendants.

Tout groupe de plans présente la structure d'une forme autonome — pouvant elle-même être à plans indépendants ou à plans groupés — qui possède ses propres contacts internes de fixation, mais dont le contact de résolution est remplacé par trois éléments secondaires qui assurent, par contact avec des éléments primaires extérieurs, le positionnement du groupe.

Il comporte, de plus, au moins un élément actif — soit primaire de position, soit primaire ou secondaire de résolution — qui justifie la présence du groupe dans l'abaque et s'oppose à ce qu'on puisse le supprimer.

Tout comme les formes complètes, les groupes peuvent à leur tour être à plans indépendants ou à plans groupés.

Dans le premier cas, il s'agit de groupes susceptibles d'être formés par le positionnement successif des plans qui les composent, dans le second, de groupes dont l'établissement implique à son tour le groupement de certains plans préalablement à leur mise en place.

Les groupes secondaires qui peuvent ainsi exister au sein des groupes principaux seront appelés SOUS-GROUPES, et l'on pourra répéter pour eux ce qui a été dit pour les groupes principaux.

D'un point de vue tout à fait général les formes pourront ainsi comporter plusieurs groupes indépendants, ces groupes présentant chacun des structures plus ou moins complexes avec des étagements en profondeur d'autant plus prononcés que la mise en évidence de sous-groupes peut être poursuivie plus avant.

On aboutit toujours, finalement, à des structures à plans indépendants puisque le principe d'un positionnement des plans par tâtonnements n'est pas retenu dans cette étude.

La figure 23 met en évidence, à titre d'exemple, la structure d'une forme qui comporte un groupe simple.

Dans les trois premiers plans on trouve en *A* la structure classique

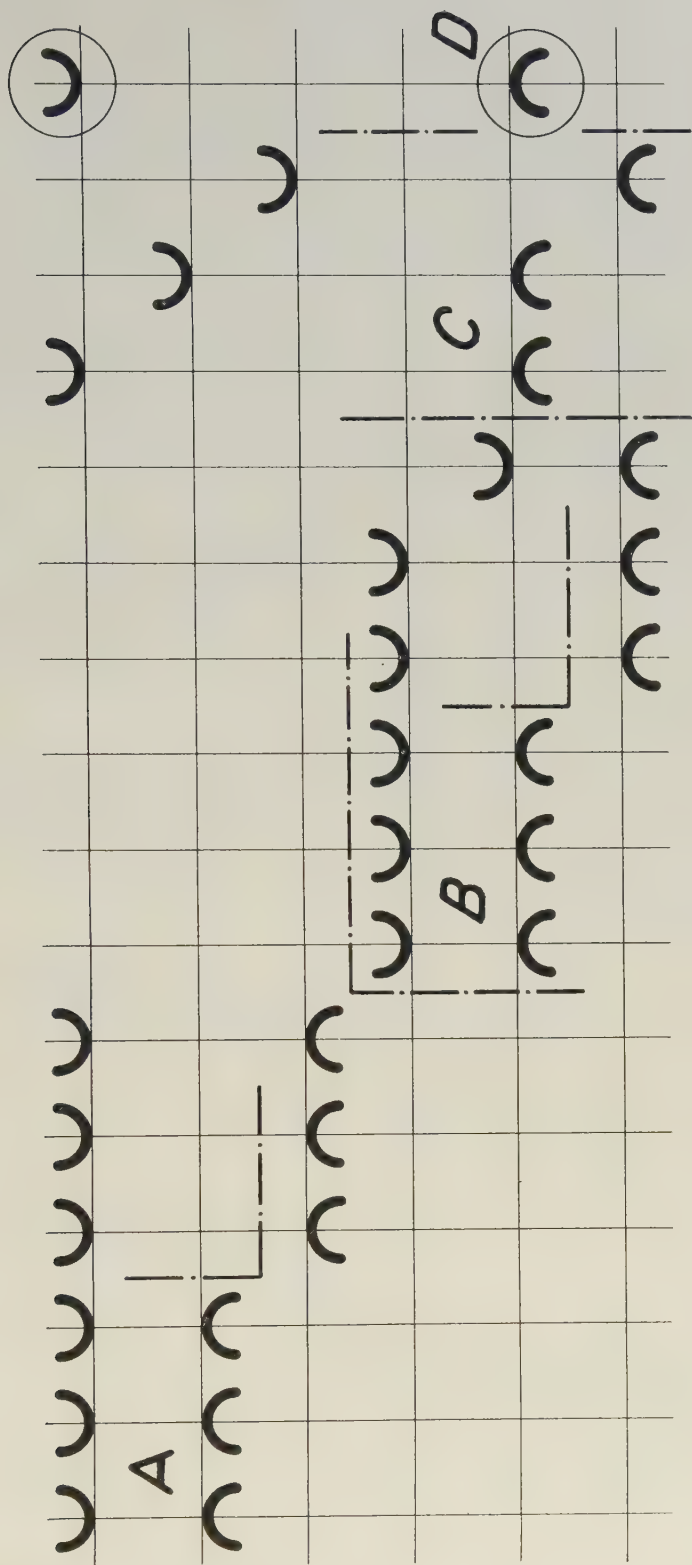


Fig. 23

des formes à plans indépendants. Cette structure se reproduit en B dans les trois plans groupés et l'on trouve en C les éléments secondaires de fixation du groupe.

Le groupe participe à l'économie générale de la forme par l'élément D (secondaire de résolution).

Quand on ordonne une forme à plans groupés l'existence des groupes se manifeste, si l'on compare la forme à une forme à plans indépendants qui comporterait le même nombre de plans, par le fait que certains éléments secondaires sont déportés verticalement vers le bas dans la forme à plans groupés, un seul d'entre eux — celui qui fait partie du contact de résolution — pouvant éventuellement être rejeté vers le haut.

On peut énoncer, pour toute forme à plans groupés, les propriétés suivantes (en prenant comme forme de référence une forme à plans indépendants à même nombre de plans):

1° — *Les plans qui ne sont pas groupés n'ont aucun élément secondaire rejeté vers le bas.*

2° — *Chaque plan appartenant à un groupe, à l'exception du dernier plan de chaque groupe, a un ou plusieurs éléments secondaires rejetés vers le bas.*

3° — *Le dernier plan de chaque groupe n'a aucun élément secondaire rejeté vers le bas.*

4° — *Le dernier plan de la forme peut avoir son élément secondaire de résolution rejeté vers le haut.*

Il résulte de ces propriétés qu'un groupe commence toujours au droit d'un plan pour lequel il y a rejet d'un ou de plusieurs éléments secondaires vers le bas, sans qu'un tel rejet existe pour le plan qui précède. Le groupe comprend alors les plans qui suivent et pour lesquels il continue à y avoir rejet d'éléments secondaires, jusque *et y compris* le premier plan pour lequel on constate l'absence de rejet.

Un nouveau groupe recommence avec un plan caractérisé par un nouveau rejet et ainsi de suite.

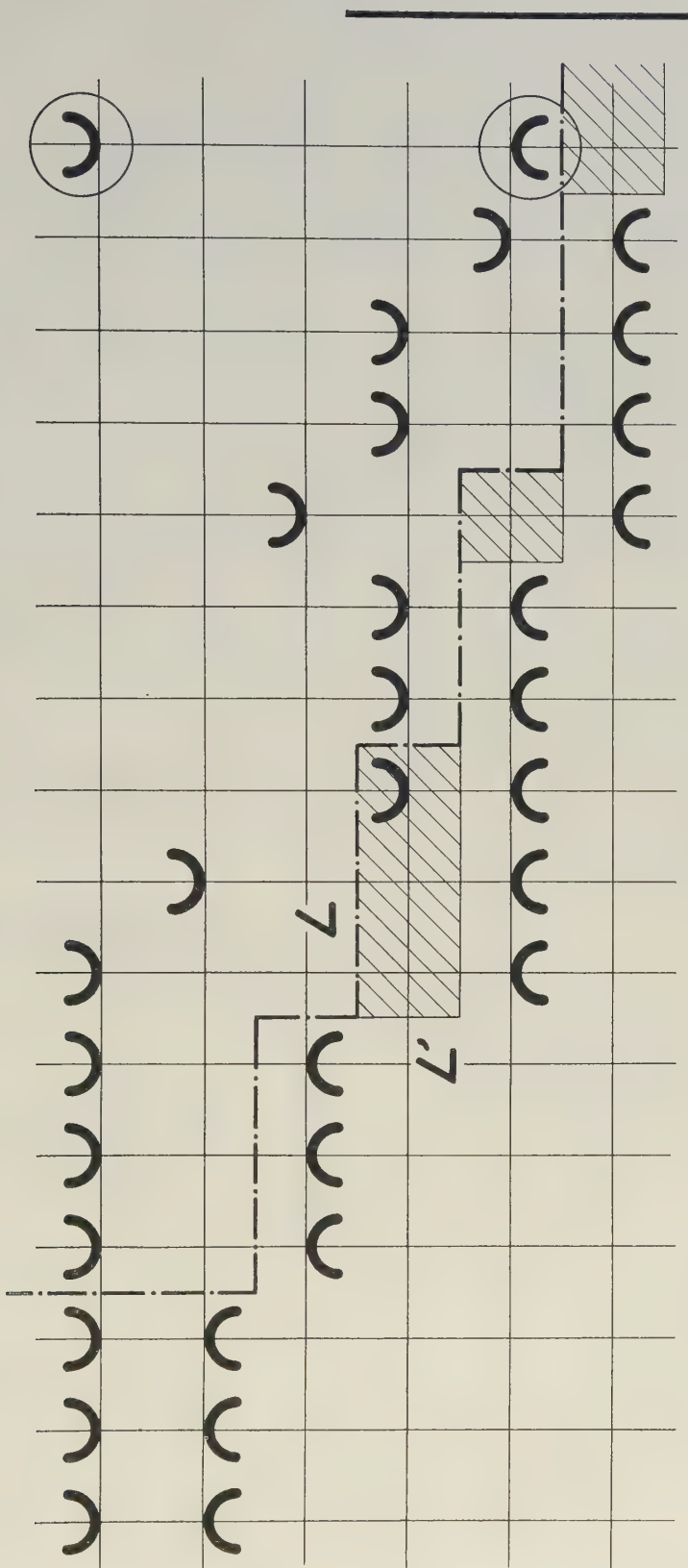


Fig. 24

Critère de détermination des plans groupés.

On déduit immédiatement de ces considérations un critère rapide de détermination des plans groupés, dans les formes ordonnées, par simple examen du dessin des éléments secondaires.

Imaginons en effet la ligne L' bordant les éléments secondaires d'une forme à plans groupés et la ligne L correspondant au cas des plans indépendants. La ligne L' se trouve rejetée vers la gauche, par rapport à L , au droit de tous les plans appartenant à des groupes, ceux-ci se terminant chaque fois au droit du premier plan pour lequel L' est confondu avec L (sauf en ce qui concerne le dernier plan de l'abaque, pour lequel cette coïncidence ne sera pas réalisée quand l'élément de résolution sera rejeté vers le haut).

La figure 24 représente, sous forme ordonnée, le même abaque que la figure 23. On vérifie facilement sur ce schéma les propriétés qui ont été énoncées et le tracé des lignes L et L' montre l'application du critère de détermination des plans groupés.

Groupes vrais et groupes apparents

L'existence de plans groupés n'est pas toujours un caractère intrinsèque d'un abaque. Cette existence peut dépendre de l'ordre de mise en place des plans.

Nous devons distinguer dès lors les formes caractérisées par la présence effective de groupes et celles dont les groupes n'ont qu'une existence artificielle et peuvent être supprimés par une modification de l'ordre de succession des plans *respectant les conditions d'emploi de l'abaque* (contacts de résolution imposés).

Compte tenu de ces considérations, nous classerons les groupes en trois catégories :

Groupes du 1^{er} genre : Les groupes qui ne peuvent pas être supprimés par des mouvements de plans respectant la résolution.

Groupes du 2^e genre : Les groupes qui peuvent être supprimés par

des mouvements respectant la résolution, mais dont la suppression entraîne le groupement de plans qui n'étaient pas liés d'abord.

Groupes du 3^e genre : Les groupes qui peuvent être supprimés par des mouvements respectant la résolution sans qu'il en résulte dans l'abaque de nouveaux groupements.

Nous appellerons GROUPE VRAI tout groupe appartenant au premier ou au deuxième genre, GROUPE APPARENT tout groupe appartenant au troisième genre.

EXEMPLE I. — Le groupe des plans III et IV de la forme donnée comme exemple à la figure 22 est un groupe *vrai*. Il appartient au genre *B*.

On peut bien, en effet, supprimer le groupe formé par les plans III et IV en positionnant ces plans en premier lieu, mais ce sont alors les plans I et II qui doivent être groupés pour pouvoir être mis en place.

EXEMPLE II. — Dans l'exemple de la figure 25 au contraire le groupe des plans III et IV (1^{er} schéma) est un groupe *apparent*, puisqu'il suffit de positionner les plans dans l'ordre III — IV — I — II pour faire disparaître le groupe (2^d schéma) et transformer la forme à plans groupés en forme à plans indépendants.

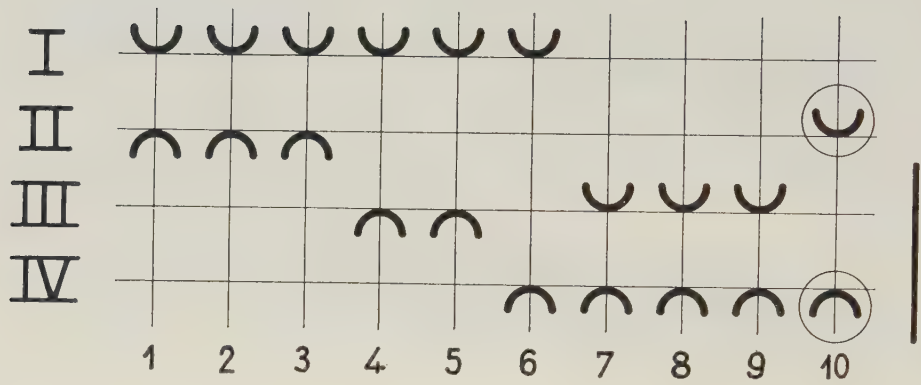
REMARQUE IMPORTANTE. — Seuls les groupes vrais doivent être pris en considération, les groupes apparents pouvant toujours être supprimés par des modifications adéquates de l'ordre de succession des plans. *Aussi, quand nous parlerons d'abaques à plans groupés, sera-t-il toujours sous-entendu que les groupes sont des groupes vrais.*

Abaques mixtes

L'indépendance des plans et l'existence de plans groupés (groupes vrais) ne sont pas des caractères incompatibles pour un même abaque.

Nous appellerons ABAQUE MIXTE tout abaque qui comporte à la fois des formes à plans indépendants et des formes à plans groupés.

1



2

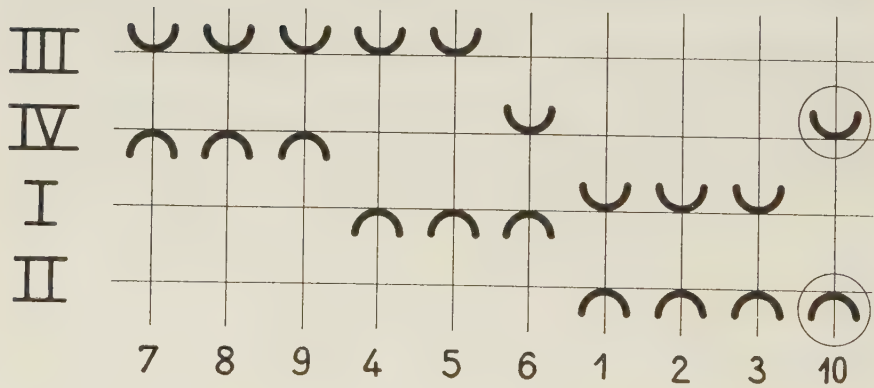


Fig. 25

Pour un abaque mixte donné, la nature des formes dépend du choix du contact de résolution. Elle est déterminée sans ambiguïté quand ce contact est choisi *.

La figure 26 donne, pour fixer les idées, un exemple d'abaque mixte.

La forme 1, dans laquelle A est le contact de résolution, est une forme à plans indépendants. Elle ne permet pas la détermination de variables impliquées dans un contact tel que B .

Mais il suffit de grouper les plans III et IV comme l'indique la forme 2 pour que ce contact B à son tour puisse être choisi comme contact de résolution.

Extension aux formes à plans groupés de certaines définitions relatives aux formes à plans indépendants

Nous étendrons aux formes à plans groupés, moyennant les remarques suivantes, quelques définitions relatives aux formes à plans indépendants.

Formes ordonnées.

La définition des formes ordonnées à plans indépendants s'étend sans modification aux formes à plans groupés.

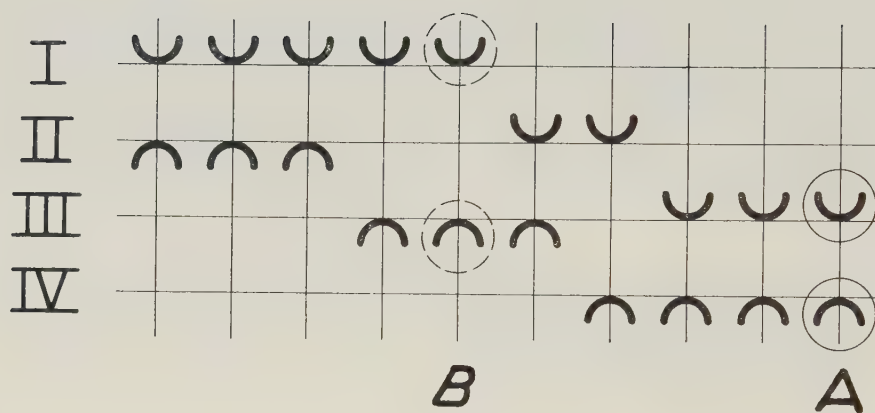
Il est à conseiller, pour ne pas masquer la structure, de rejeter *toujours* le contact de résolution à l'extrême droite du schéma.

Plans conjugués.

La notion de plans conjugués reste valable dans les formes à plans groupés. On pourra l'étendre aux *groupes* de plans, ces groupes étant considérés comme des entités en relation avec l'extérieur par des contacts qui caractérisent des ordres de conjugaison, comme pour les plans isolés.

* En effet si elle ne l'était pas, le ou les groupes que la forme pourrait comporter ne seraient que des groupes apparents — hypothèse que nous excluons implicitement.

1



2

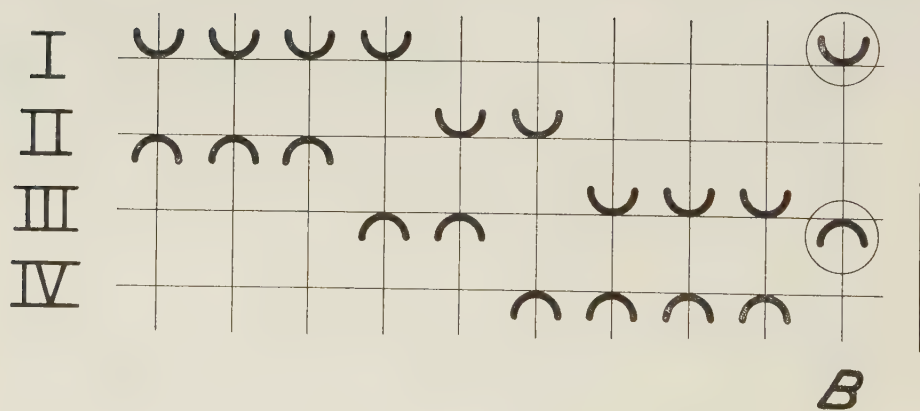


Fig. 26

Formes équivalentes.

La définition des formes équivalentes s'étend sans modification aux formes à plans groupés.

Attirons cependant l'attention sur le fait que les mouvements de plans permettant de ramener des formes équivalentes les unes aux autres peuvent modifier le groupement des plans.

Dans le cas des abaques mixtes, ces mouvements peuvent provoquer l'apparition ou la disparition de groupes.

Formes fondamentales.

La définition des formes fondamentales s'étend aux formes à plans groupés, mais comme ces formes peuvent différer à la fois par leurs éléments primaires *et par leurs éléments secondaires*, l'examen devra porter ici sur ces deux catégories d'éléments.

Le critère sera le même que pour les abaques à plans indépendants : premier élément aberrant à partir de la gauche rejeté au-dessus des éléments homologues de toutes les formes équivalentes.

L'examen portera *d'abord* sur les éléments *secondaires*. Si le critère permet d'isoler une forme unique, cette forme sera prise comme forme fondamentale *quelle que soit la disposition de ses éléments primaires*.

Si, au contraire, le critère isole plusieurs formes caractérisées par une répartition identique des éléments secondaires on passe, mais pour ces formes seulement, à l'examen des éléments primaires. Le même critère, appliqué à ces éléments, isole alors la forme fondamentale.

On pourra préférer, dans certains cas, appliquer le critère aux seuls éléments de fixation — secondaires, puis primaires — et ensuite seulement, s'il s'avère nécessaire, aux éléments de résolution.

Les formes à plans groupés qui ne sont pas fondamentales seront appelées, comme les formes non fondamentales à plans indépendants, formes subsidiaires.

Remarquons que dans le cas des abaques mixtes, *et pour autant que le contact de résolution soit rejeté à l'extrême droite du schéma dans les formes à plans groupés*, la forme fondamentale sera toujours une forme à plans indépendants.

Formes simples et formes multiples.

Les définitions relatives aux formes simples et multiples, ainsi que la notion d'ordre de multiplicité, s'étendent sans modification aux formes à plans groupés.

Propriétés diverses

Nous donnerons ci-après quelques indications relatives à la génération des formes tangentielles complètes à plans groupés, au mouvement des plans dans ces formes, à l'application des critères d'équivalence et à la résolution.

Génération.

Les formes tangentielles complètes à plans groupés peuvent être générées en tenant compte des caractères qui ont été mis en évidence au paragraphe relatif à l'étude de leur structure. On pourra expliciter dans les schémas, pour faciliter l'opération, la structure propre des groupes et des sous-groupes, quitte à ordonner ensuite les formes si on le juge utile.

Attirons l'attention sur le fait qu'il n'existe pas de formes à plans groupés pour les abaqes à trois plans.

En effet, les seuls plans qui peuvent être groupés dans une forme à trois plans sont les plans II et III. Mais le groupe ainsi constitué ne sera jamais qu'un groupe apparent, puisqu'il suffira d'adopter l'ordre

$$\text{II} - \text{III} - \text{I}$$

pour transformer la forme à plans groupés en une forme à plans indépendants.

Les formes à quatre plans sont donc les premières formes qui peuvent comporter des plans constituant un groupe vrai.

On établirait de même que, pour qu'une forme puisse comporter un sous-groupe vrai, il faut qu'elle comporte au moins huit plans, et ainsi de suite.

Mouvement des plans.

Un mouvement de plans, que ces plans soient groupés ou non, peut toujours être considéré comme résultant des mouvements individuels des plans déplacés. Il en résulte que l'étude du mouvement des plans dans les formes à plans groupés repose sur les mêmes lemmes que l'étude du mouvement des plans dans les formes à plans indépendants. Nous y renvoyons le lecteur.

Les théorèmes relatifs aux mouvements des plans dans les formes à plans indépendants seront étendus aux formes à plans groupés en tenant compte des élargissements qui peuvent résulter de la possibilité, pour certains plans, de former des groupes.

On considérera successivement les mouvements de plans individuels et les mouvements de plans groupés se déplaçant en bloc.

On remarquera, en particulier, que dans une forme à plans groupés un groupe de plans peut toujours être permuté avec l'ensemble des plans qui précèdent. Les plans ramenés en arrière forment alors un nouveau groupe qui remplace le premier.

Cette propriété est une généralisation de la propriété de permutableté des deux premiers plans d'une forme à plans indépendants.

Indiquons enfin que l'étude des conditions de permanence des groupes permettra de formuler des critères d'existence pour les groupes vrais et des règles permettant de reconnaître à priori les groupes vrais et les groupes apparents.

Critères d'équivalence.

Les critères d'équivalence donnés pour les formes à plans indépendants sont applicables aux formes à plans groupés en tant que conditions nécessaires. La non-identité de répartition des éléments, de groupement des contacts ou de groupement des éléments entraîne la non-équivalence des formes.

Pour ce qui est des conditions suffisantes, nous nous bornerons à indiquer ici que le critère du groupement des contacts et le critère du groupement des éléments sont des critères complets pour les formes à quatre plans. Le critère de la répartition des éléments, par contre,

n'est pas complet pour ces formes. (Voir plus loin : *Etude des formes à quatre plans.*)

Une étude générale des abaques à cinq plans, que nous effectuons actuellement, nous permettra de préciser les conditions d'application des critères aux formes à cinq plans à plans groupés*.

Remarquons cependant dès à présent que l'on peut construire, par analogie avec l'exemple donné pour les formes à plans indépendants dans la figure 14, un exemple qui montre qu'en tout état de cause les critères ne sont plus complets, dans le cas des plans groupés, à partir de $n = 6$. En effet, les deux formes données par la figure 27 sont caractérisées par un groupement identique des éléments (ce qui entraîne évidemment une répartition identique des éléments et un groupement identique des contacts). On voit cependant immédiatement, par l'examen des contacts indiqués dans les schémas, que les deux formes ne sont pas équivalentes.

Résolution.

En ce qui concerne la résolution nous attirerons l'attention sur le fait que, dans les formes à quatre plans groupés, le contact de résolution n'intéresse obligatoirement le dernier plan que si ce plan est indépendant.

Si le dernier plan est groupé, le contact de résolution peut intéresser un quelconque des plans appartenant au groupe du dernier plan.

Faisons remarquer encore que, *pour un ordre de succession déterminé des plans, le fait pour une forme d'être à plans groupés ou non ne dépend pas du choix du contact de résolution.*

Le dernier plan, en effet, comporte quatre éléments ou plus de quatre éléments.

* Nous avons montré, depuis la rédaction de notre manuscrit, que la combinaison des critères de la répartition des éléments et du groupement des contacts ne forme pas un critère complet pour les formes tangentielles complètes à plans groupés à cinq plans.

Le critère du groupement des éléments, par contre, est un critère complet pour ces formes.

Ainsi se trouve confirmée l'impossibilité — que laissait prévoir le fait que nous n'avions pu en construire d'exemple — de trouver deux formes tangentielles complètes à plans groupés à cinq plans non équivalentes, caractérisées par une même répartition des éléments, un même groupement des contacts et un même groupement des éléments.

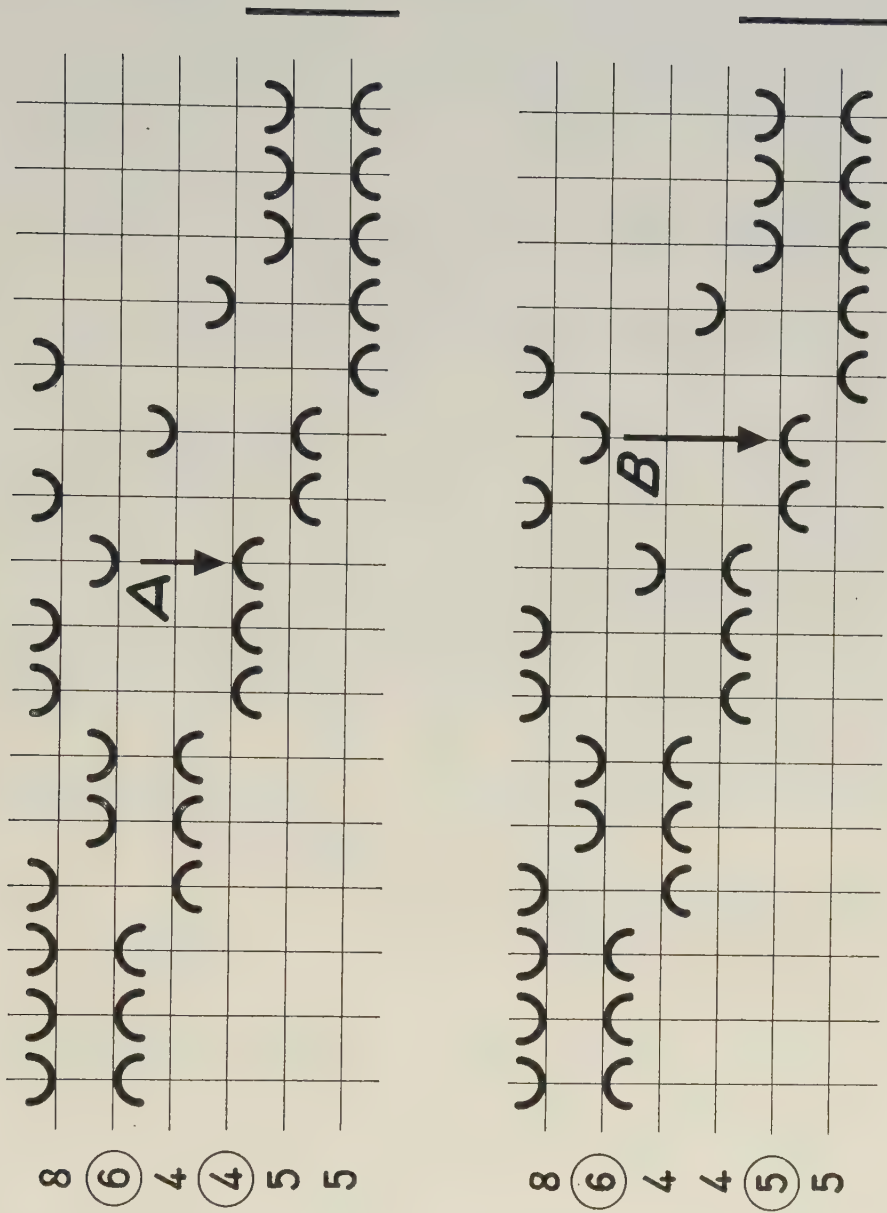


Fig. 27

Si le dernier plan comporte quatre éléments, ce plan n'est pas groupé. Or, un changement de contact de résolution ne peut entraîner qu'un changement d'élément primaire de résolution, ce qui est sans influence sur les groupements existant dans la forme.

Si le dernier plan comporte plus de quatre éléments, ce plan est groupé et le reste forcément quel que soit le contact de résolution.

Etude des formes à quatre plans

On construira les formes à plans groupés à quatre plans en remarquant qu'il n'existe, pour ces formes, qu'une seule possibilité de groupement : celui des plans III et IV.

Le groupement des plans II et III ou celui des plans II, III et IV ne conduit, en effet, qu'à des groupes apparents qui s'éliminent par simple permutation des plans groupés avec le plan I. Comme ce plan I ne peut en aucun cas faire partie d'un groupe il reste, comme seule possibilité, le groupement des plans III et IV.

Les formes distinctes que l'on peut obtenir sont au nombre de trois. Elles sont données par la figure 28.

La forme I est une forme subsidiaire de la forme XI à plans indépendants. On la ramène à cette dernière en adoptant l'ordre

III — IV — I — II

de succession des plans. (cfr. *Abaques mixtes*.)

Les formes II et III ne sont équivalentes à aucune forme à plans indépendants.

Les trois formes sont des formes à résolution *partielle*. Elles ne permettent de déterminer, chacune, que les variables qui sont impliquées dans les contacts 4, 5, 6 et 7*.

La forme I permet, fonctionnant à plans indépendants, de prendre comme contacts de résolution les contacts 1, 2, 3 et 7.

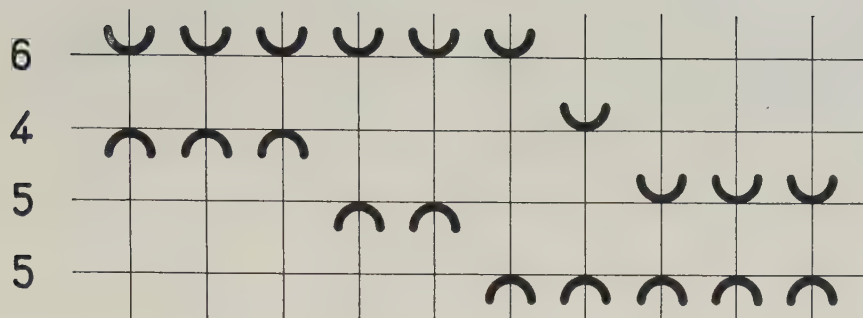
Pour le choix du contact 7 comme contact de résolution, le groupe de la forme I est donc un groupe apparent.

* Nous supposons les contacts numérotés de gauche à droite.

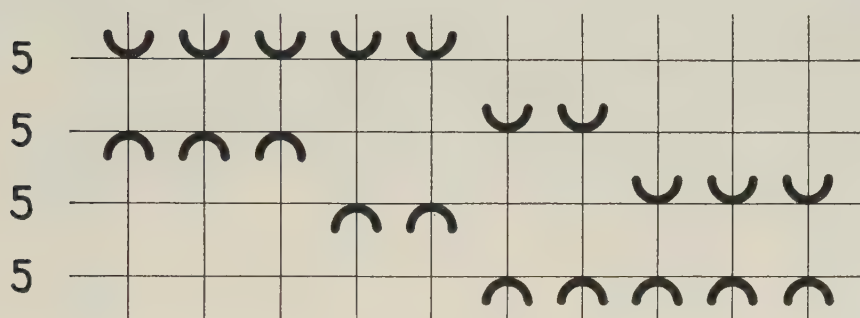
Plans groupés

n = 4

I



II



III



Fig. 28

Forme	Répartition des éléments	Groupelement des contacts	Groupelement des éléments
I	6—4—5—5	2—1—2	1—1—1 1—0—1 1—0—2
II	5—5—5—5	2—2—0	1—1—0 1—1—0 1—1—0
III	5—5—5—5	2—0—4	1—0—2 1—0—2 1—0—2

Tableau IV

Le Tableau IV donne la répartition des éléments, le groupement des contacts et le groupement des éléments pour ces formes.

Il montre que deux formes distinctes diffèrent par le groupement des contacts et par le groupement des éléments, mais pas nécessairement par la répartition des éléments. Ce qui justifie, pour ces formes, les indications données plus haut quant à l'application des critères d'équivalence.

Remarque relative à l'étude générale des formes à quatre plans.

Il résulte de ce qui vient d'être dit et de l'étude des formes à quatre plans indépendants, que les abaques tangentiels complets à quatre plans comportent *treize* types morphologiquement différents.

Ils se répartissent comme suit :

- *dix* abaques à plans indépendants, dont *un* à résolution totale et *neuf* à résolution partielle ;
 - *deux* abaques à plans groupés à résolution partielle ;
 - *un* abaque mixte à résolution partielle.
-

APPENDICE

Représentation symbolique des structures tangentielles

Nous proposons ci-après, pour la structure des abaque complets à contacts tangentiels, une représentation symbolique d'un emploi particulièrement commode.

Elle s'obtient de la manière suivante :

1° — *On écrit sur une diagonale d'un carré, en caractères romains les numéros d'ordre successifs des plans qui constituent l'abaque ;*

2° — *On indique à droite de cette diagonale, en caractères ordinaires et à l'intersection des horizontales et des verticales menées par les différents numéros, l'ordre de conjugaison des plans intéressés par les alignements qui s'y coupent ;*

3° — *On borde d'un trait fort les lignes qui correspondent à des plans groupés éventuels.*

Le tableau triangulaire ainsi obtenu définit d'une manière complète la structure d'un abaque, au même titre qu'une représentation schématique.

Exemples

La figure 29 met en regard la représentation schématique d'un abaque tangentiel complet à quatre plans indépendants et la représentation symbolique correspondante.

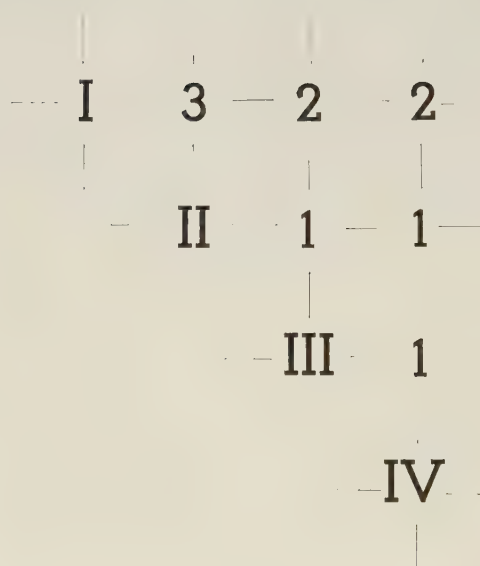
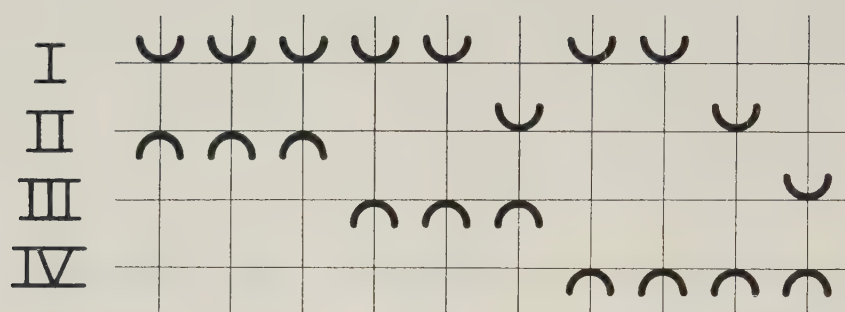


Fig. 29

On voit immédiatement comment on remonte de la représentation symbolique au schéma.

La figure 30 montre la représentation symbolique de la forme à plans groupés donnée dans la figure 22.

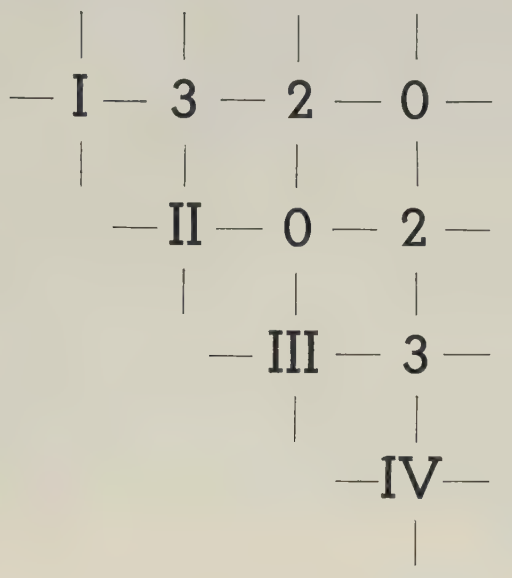


Fig. 30

Comme on le voit, la représentation symbolique se réduit à de simples tableaux de chiffres. Elle n'est pas aussi parlante que la représentation schématique car elle ne visualise pas l'abaque, mais elle est cependant de lecture plus directe. Elle évite, de plus, l'exécution des figures.

Propriétés de la représentation symbolique

Toute représentation symbolique jouit des propriétés suivantes, qui résultent directement des principes sur lesquels elle est basée :

1° — *L'ordre de conjugaison de deux plans de l'abaque est donné par le chiffre inscrit à la rencontre des alignements — horizontal et vertical — passant par les numéros d'ordre des deux plans.*

2° — *La somme des chiffres inscrits sur une même horizontale, à droite du numéro d'ordre d'un plan, donne le nombre d'éléments PRIMAIRES du plan auquel correspond cette horizontale.*

3° — *La somme des chiffres inscrits sur une même verticale, au-dessus du numéro d'ordre d'un plan, donne le nombre d'éléments SECONDAIRES du plan correspondant.*

4° — *Le nombre total des éléments d'un plan est égal, en vertu des propriétés 2 et 3, à la somme des chiffres inscrits horizontalement au niveau du numéro de ce plan et verticalement au-dessus de ce numéro.*

Notation symbolique

Quand on ne désire pas expressément donner une représentation qui, malgré son caractère symbolique, fait cependant image, on peut substituer à la représentation symbolique une *notation symbolique* dont l'emploi offrira de réels avantages au point de vue typographique.

Cette notation consiste à écrire, les uns à la suite des autres, les numéros d'ordre ou les symboles au moyen desquels sont repérés les plans et à indiquer pour chacun d'eux, entre parenthèses, les nombres respectifs des contacts avec chacun des plans qui suivent.

Si les plans sont repérés par des numéros d'ordre on peut convenir, pour la clarté de la notation, d'écrire ces numéros en caractères romains.

On surmonte d'un trait fort les éléments correspondant à des plans groupés éventuels.

Prenons comme exemple les formes considérées ci-dessus. La notation symbolique sera, en repérant les plans par leurs numéros d'ordre successifs,

I (3, 2, 2) II (1, 1) III (1) IV

pour la première et

I (3, 2, 0) II (0, 2) III (3) IV

pour la seconde,

La notion symbolique s'interprête aussi facilement que la représentation symbolique. Ainsi, dans le premier exemple, le 2 qui figure en troisième place dans la parenthèse qui suit I indique que le contact du plan I avec le troisième plan qui suit — donc avec le plan IV — est un contact d'ordre deux.

On voit d'ailleurs que les éléments qui figurent dans les parenthèses sont ceux qui, dans la représentation symbolique, se trouvent sur les horizontales successives. Cette remarque permet de passer instantanément de la notation symbolique à la représentation symbolique et inversement.

On peut, si on le désire, expliciter dans la notation symbolique le nombre des éléments que comporte chaque plan. Ces nombres seront alors indiqués en indice des symboles qui repèrent les plans ou remplaceront ces symboles eux-mêmes.

Les notations symboliques, données ci-dessus à titre d'exemple, deviendraient ainsi

$$\mathbf{7} (3, 2, 2) \quad \mathbf{5} (1, 1) \quad \mathbf{4} (1) \quad \mathbf{4}$$

et

$$\mathbf{5} (3, 2, 0) \quad \mathbf{5} (0, 2) \quad \overline{\mathbf{5} (3)} \quad \mathbf{5}$$

On ne perdra pas de vue que cette seconde forme n'est pas plus complète que la première. Elle ne fait qu'*expliciter* des éléments qui sont contenus implicitement dans l'autre.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur le choc avec frottement des corps
non parfaitement élastiques

Vu et approuvé :

Paris, le 24 novembre 1948.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

JEAN CABANNES

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN SARRAILH.

PROXIME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET NATURELLES

IMPRIMÉ EN BELGIQUE

LE JURY DE LA FACULTE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET NATURELLES
A BRUXELLES

LE RECTOR DE L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES
LE 15 JANVIER 1884

IMP. R. LOUIS
BRUXELLES

IMPRIMÉ EN BELGIQUE

IMP. R. LOUIS
37-39, rue Borrens
BRUXELLES